Борис Кордемский

Математическая смекалка

альпина паблишер

Борис Кордемский

Математическая смекалка

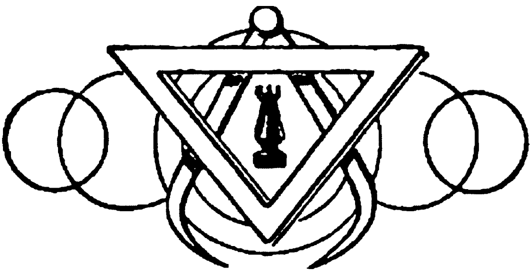
альпина паблишер

EDITOR'S CHOICE

Editor's choice —
выбор главного редактора

Меня очень радует, что в России возвращается интерес читателей к таким интеллектуальным развлечениям, как логические игры и задачи.
Что может быть лучше, чем на досуге разложить спички или разобраться, какая же монета тяжелее ☺. Я это совершенно серьезно говорю: упражнять мозг надо всегда, а логические и математические задачки — лучший для этого способ. Я это делаю с детства и пока не пожалел ни об одной минуте, потраченной на головоломки.

Сергей Турко,
главный редактор издательства
«Альпина Паблишер»



Борис Кордемский

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СМЕКАЛКА

2-е издание

альпина
ПАБЛИШЕР

МОСКВА
2017

УДК 51
ББК 22.1
К 66

Кордемский Б.А.

К 66 Математическая смекалка / Борис Анастасьевич Кордемский. — 2-е изд. — М. : Альпина Паблишер, 2017. — 547 с.: ил.

ISBN 978-5-9614-6009-4

Решение увлекательных задач — отличный способ не только попрактиковаться в математике, но и развить аналитическое мышление и смекалку.

В этом популярном задачнике, на котором выросло не одно поколение любителей математики, вы найдете интересные задачи, логические игры, фокусы и шутки. Толковые разъяснения и подробные решения помогут разобраться во всех предложенных темах — от арифметики и геометрии до алгебры.

«Математическая смекалка» предназначена для читателей с самой разной степенью подготовки: от школьника, увлеченного математикой, до взрослого, желающего испытать свои математические навыки.

УДК 51
ББК 22.1

ISBN 978-5-9614-6009-4

СОДЕРЖАНИЕ

ГЛАВА ПЕРВАЯ

ЗАТЕЙНЫЕ ЗАДАЧИ

РАЗДЕЛ I

Раздел II

Глава вторая

ЗАТРУДНИТЕЛЬНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Глава третья

ГЕОМЕТРИЯ НА СПИЧКАХ

Глава четвертая

СЕМЬ РАЗ ПРИМЕРЬ, ОДИН РАЗ ОТРЕЖЬ

Глава пятая

УМЕНЬЕ ВЕЗДЕ НАЙДЕТ ПРИМЕНЕНЬЕ

Глава шестая

ДОМИНО И КУБИК

А. Домино

Б. Кубик

Глава седьмая

СВОЙСТВА ДЕВЯТКИ

Глава восьмая

С АЛГЕБРОЙ И БЕЗ НЕЕ

Глава десятая

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИГРЫ И ФОКУСЫ

А. Игры

Б. Фокусы

Глава одиннадцатая

ДЕЛИМОСТЬ ЧИСЕЛ

Глава двенадцатая

КРОСС-СУММЫ И ВОЛШЕБНЫЕ КВАДРАТЫ

А. Кросс-суммы

Б. Волшебные квадраты

В. Элементы теории волшебных квадратов

Глава тринадцатая

КУРЬЕЗНОЕ И СЕРЬЕЗНОЕ В ЧИСЛАХ

Глава четырнадцатая

ЧИСЛА ДРЕВНИЕ, НО ВЕЧНО ЮНЫЕ

А. Первоначальные числа

Б. Числа Фибоначчи

В. Фигурные числа

ЗАДАЧИ

Книга — книгой,
А мозгами двигай.
В. Маяковский

ГЛАВА ПЕРВАЯ

ЗАТЕЙНЫЕ ЗАДАЧИ

РАЗДЕЛ I

Проверьте и поупражняйте свою смекалку вначале на таких задачах, для решения которых требуется лишь целеустремленная настойчивость, терпение, сообразительность и умение складывать, вычитать, умножать и делить *целые* числа.

1. Наблюдательные ребята

Школьники — мальчик и девочка — только что произвели метеорологические измерения.

Теперь они отдыхают на пригорке и смотрят на проходящий мимо них товарный поезд.

Паровоз на подъеме отчаянно дымит и пыхтит. Вдоль полотна железной дороги ровно, без порывов дует ветер.

— Какую скорость ветра показали наши измерения? — спросил мальчик.

— 7 метров в секунду.

— Сегодня мне этого достаточно, чтобы определить, с какой скоростью идет поезд.

— Ну да? — усомнилась девочка.

— А ты присмотрись повнимательнее к движению поезда.

Девочка немного подумала и тоже сообразила, в чем тут дело.

Рис. 1. С какой скоростью идет поезд?

А увидели они в точности то, что нарисовал наш художник (рис. 1). С какой же скоростью шел поезд?

2. «Каменный цветок»

Помните талантливого умельца — мастера Данилу из сказки Бажова «Каменный цветок»?

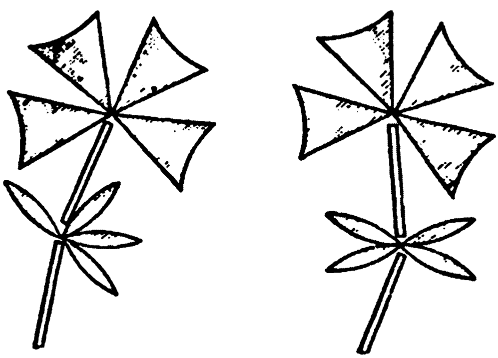


Рис. 2. Из частей этих двух цветков сложите круг

Рассказывают на Урале, что Данила, будучи еще учеником, выточил два таких цветка (рис. 2), листья, стебли и лепестки которых разнимались, а из образовавшихся частей цветков можно было сложить пластинку в форме круга.

Попробуйте! Перерисуйте Данилины цветочки на бумагу или картон, вырежьте лепестки, стебли и листья и сложите круг.

3. Перемещение шашек

Положите на стол шесть шашек в ряд попеременно — черную, белую, еще черную, еще белую и т. д. (рис. 3).

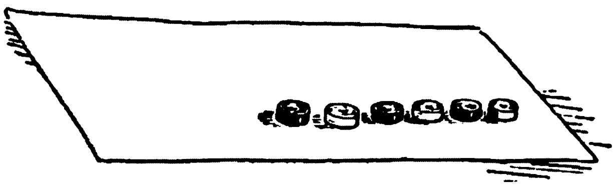


Рис. 3. Белые шашки должны оказаться слева, за ними — черные

Справа или слева оставьте свободное место, достаточное для четырех шашек.

Требуется переместить шашки так, чтобы слева оказались все белые, а вслед за ними все черные. При этом перемещать на свободное место нужно сразу две находящиеся рядом шашки, не меняя порядка, в котором они лежат. Для решения задачи достаточно сделать три перемещения (три хода)[1].

Если у вас нет шашек, воспользуйтесь монетами или нарежьте кусочки бумаги.

4. В три хода

Положите на стол три кучки спичек. В первую кучку положите 11 спичек, во вторую — 7, в третью — 6. Перекладывая спички из одной кучки в любую другую, нужно сравнять все три кучки, чтобы в каждой было по 8 спичек. Это возможно, так как общее

[1] Тема этой задачи получает дальнейшее развитие в задачах 86 и 87. — *Здесь и далее прим. авт.*

число спичек — 24 — делится на 3 без остатка. При этом требуется соблюдать такое правило: к любой кучке разрешается добавлять ровно столько спичек, сколько в ней уже есть. Например, если в кучке 6 спичек, то и добавить к ней можно только 6, если в кучке 4 спички, то и добавить к ней можно только 4.

Задача решается в три хода.

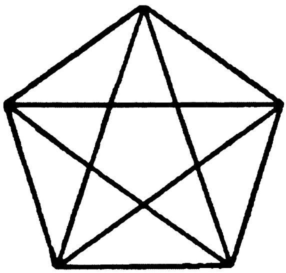


Рис. 4

5. Сосчитайте!

Проверьте свою геометрическую наблюдательность: сосчитайте, сколько треугольников в фигуре, изображенной на рис. 4.

6. Путь садовника

На рис. 5 дан план небольшого яблоневого сада (точки — яблони). Садовник обошел все яблони подряд.

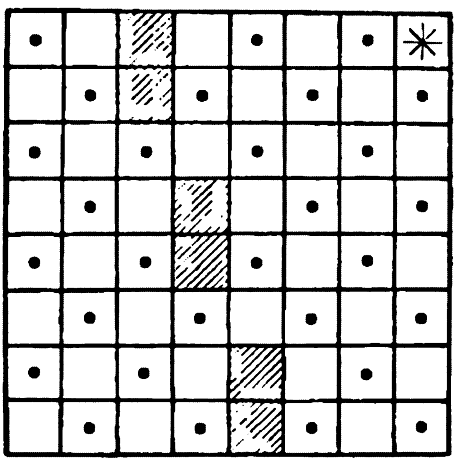


Рис. 5. План яблоневого сада

Начал он с клетки, отмеченной звездочкой, и обошел одну за другой все клетки — как занятые яблонями, так и свободные, ни разу при этом не возвращаясь на пройденную клетку.

По диагоналям он не ходил и на заштрихованных клетках не был (там располагаются различные строения).

Закончив обход, садовник оказался на той же клетке, с которой начал свой путь.

Начертите в своей тетради путь садовника.

7. Нужно смекнуть

В корзине лежат пять яблок. Как разделить эти яблоки между пятью девочками, чтобы каждая получила по одному яблоку, а одно яблоко осталось в корзине?

8. Недолго думая

Скажите, сколько в комнате кошек, если в каждом из четырех углов комнаты сидит по одной кошке, против каждой кошки сидит по три кошки и на хвосте у каждой кошки сидит по кошке?

9. Вниз — вверх

Мальчик плотно прижал грань синего карандаша к грани желтого карандаша. Один сантиметр (в длину) прижатой грани синего карандаша, считая от нижнего конца, запачкан краской. Желтый карандаш мальчик держит неподвижно, а синий, продолжая прижимать к желтому, опускает на 1 см, затем возвращает в прежнее положение, опять опускает на 1 см и опять возвращает в прежнее положение. Десять раз он так опускает и десять раз поднимает синий карандаш (двадцать движений).

Если допустить, что за это время краска не высыхает и не истощается, то на сколько сантиметров в длину окажется запачканным желтый карандаш после двадцатого движения?

Примечание. Эту задачу придумал математик Леонид Михайлович Рыбаков по дороге к дому после удачной охоты на уток. Что для него послужило поводом к сочинению задачи, вы прочтете в ответах после того, как решите задачу.

10. Переправа через реку (старинная задача)

Небольшой воинский отряд подошел к реке, через которую необходимо было переправиться. Мост сломан, а река глубока. Как быть? Вдруг офицер замечает у берега двух мальчиков в лодке. Но лодка так мала, что на ней может переправиться только один солдат или только двое мальчиков — не больше! Однако все солдаты переправились через реку именно на этой лодке. Каким образом?

Решайте эту задачу в уме или практически — используя шашки, спички или что-либо в этом роде и передвигая их по столу через воображаемую реку.

11. Волк, коза и капуста

Это тоже старинная задача, которая встречается в сочинениях VIII века. Она имеет сказочное содержание.

Рис. 6. Нельзя оставить без человека волка и козу

Некий человек должен был перевезти в лодке через реку волка, козу и капусту (рис. 6). В лодке мог поместиться только один человек, а с ним или волк, или коза, или капуста. Но если оставить волка с козой без человека, то волк съест козу, если оставить козу с капустой, то коза съест капусту, а в присутствии человека никто никого не съест. Человек все-таки перевез свой груз через реку.

Как он это сделал?

12. Выкатить черные шарики

В узком и очень длинном желобе находится восемь шариков: четыре черных слева и четыре белых чуть-чуть большего диаметра справа (рис. 7). В средней части желоба в стенке имеется небольшая ниша, в которой может поместиться только один шарик (любой). Два шарика могут расположиться рядом поперек желоба только в том месте, где находится ниша. Левый конец желоба закрыт, а в правом есть отверстие, через которое может пройти любой черный шарик, но не белый. Как выкатить из желоба все черные шарики? Вынимать шарики из желоба не разрешается.

Рис. 7. Выкатить черные шарики

13. Ремонт цепи

Знаете, над чем задумался молодой мастер (рис. 8)? Перед ним пять звеньев, которые нужно соединить в одну цепь, не используя дополнительных колец. Если, например, расковать кольцо *3* (одна операция) и зацепиться им за кольцо *4* (еще одна операция), затем расковать кольцо *6* и зацепиться за кольцо *7* и т. д., то всего получится восемь операций, а мастер стремится сковать цепь при помощи только шести операций. Ему это удалось. Как он действовал?

Рис. 8. Как следует действовать мастеру?

14. Исправьте ошибку

Возьмите двенадцать спичек и выложите из них «равенство», показанное на рис. 9.

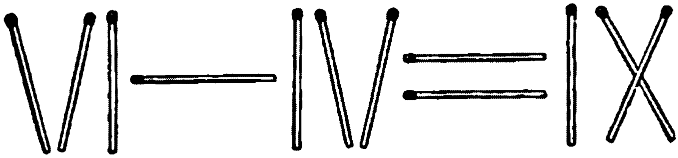


Рис. 9. Исправьте ошибку, переложив только одну спичку

Равенство, как видите, неверное, так как получается, что 6 – 4 = 9.

Переложите одну спичку так, чтобы получилось правильное равенство.

15. Из трех — четыре (шутка)

На столе лежат три спички.

Не прибавляя ни одной спички, сделайте из трех четыре. Ломать спички нельзя.

16. Три да два — восемь (еще шутка)

Вот еще аналогичная шутка. Вы можете ее предложить своему товарищу.

Положите на стол три спички и предложите товарищу добавить к ним еще две так, чтобы получилось восемь. Разумеется, ломать спички нельзя.

17. Три квадрата

Из восьми палочек (например, спичек), четыре из которых вдвое короче остальных четырех, требуется составить три равных квадрата.

18. Сколько деталей?

В токарном цехе завода вытачиваются детали из свинцовых заготовок. Из одной заготовки — деталь. Стружки, получившиеся при выделке шести деталей, можно переплавить и приготовить еще одну заготовку. Сколько деталей можно сделать таким образом из тридцати шести свинцовых заготовок?

19. Попробуйте!

В квадратном зале для танцев поставить вдоль стен десять кресел так, чтобы у каждой стены стояло поровну кресел.

20. Сохранить четность

Возьмите шестнадцать каких-нибудь предметов (бумажек, монет, слив или шашек) и расположите их по четыре в ряд (рис. 10). Теперь уберите шесть штук, но так, чтобы в каждом горизонтальном и в каждом вертикальном рядах осталось по четному числу предметов. Убирая разные шесть штук, можно получить разные решения.

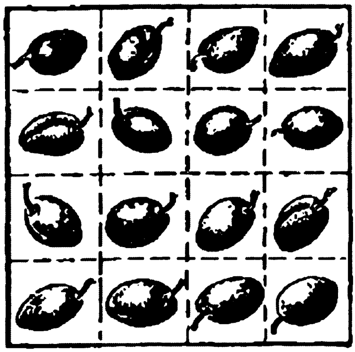


Рис. 10. Можно съесть шесть слив, но ни в одном ряду не должно остаться нечетное число слив

21. «Волшебный» числовой треугольник

В вершинах треугольника я поместил числа 1, 2 и 3 (рис. 11). Разместите числа 4, 5, 6, 7, 8, 9 по сторонам треугольника так, чтобы сумма всех чисел вдоль каждой стороны треугольника равнялась 17. Это нетрудно, так как я подсказал, какие числа следует поместить в вершинах треугольника.

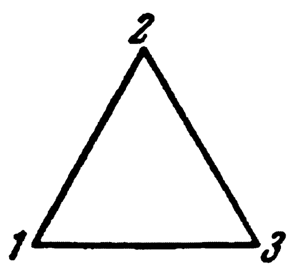


Рис. 11

Значительно дольше придется вам повозиться, если я заранее не скажу, какие числа следует поместить в вершинах треугольника, и предложу снова разместить числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, каждое по одному разу, вдоль сторон и в вершинах треугольника так, чтобы сумма чисел на каждой стороне треугольника равнялась 20.

Когда получите искомое расположение чисел, поищите и другие варианты. Условия задачи могут выполняться при самых разнообразных расположениях чисел.

22. Как играли в мяч двенадцать девочек

Двенадцать девочек стали в круг и начали играть в мяч. Каждая девочка бросала мяч своей соседке слева. Когда мяч обходил весь круг, его перебрасывали в противоположном направлении. Через некоторое время одна девочка сказала:

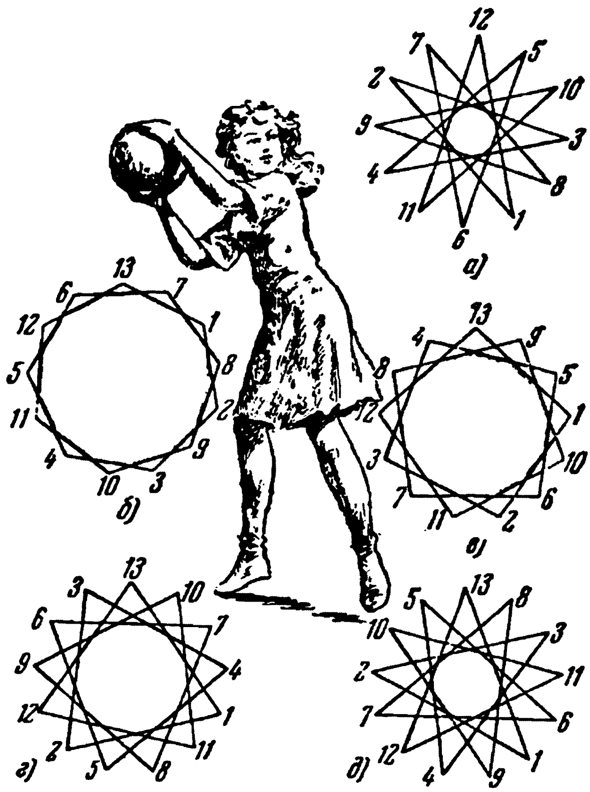


Рис. 12. Каждая девочка бросала мяч соседке слева

— Будем лучше бросать мяч через одного человека.

— Но так как нас двенадцать, то половина девочек не будет участвовать в игре, — живо возразила Наташа.

— Тогда будем бросать мяч через двух! (Каждая третья ловит мяч.)

— Еще хуже: играть будут только четверо... Если хотите, чтобы все девочки играли, нужно бросать мяч через четырех (пятая ловит). Другой комбинации нет.

— А если бросать мяч через шесть человек?

— Это будет та же самая комбинация, только мяч пойдет в противоположном направлении.

— А если играть через десять (каждая одиннадцатая ловит мяч)? — допытывались девочки.

— Таким способом мы уже играли...

Девочки стали рисовать схемы всех предлагавшихся способов игры и очень скоро убедились в том, что Наташа была права. Только одна схема игры (кроме первоначальной) охватывала всех участниц без исключения (рис. 12, *а*).

Вот если бы игравших девочек было тринадцать, мяч можно было бы бросать и через одну (рис. 12, *б*), и через двух (рис. 12, *в*), и через трех (рис. 12, *г*), и через четырех (рис. 12, *д*), и всякий раз игра охватывала бы всех участниц. Выясните, можно ли при тринадцати играющих бросать мяч через пять человек. А через шесть? Подумайте и для наглядности нарисуйте соответствующие схемы.

23. Четырьмя прямыми

Возьмите лист бумаги и нанесите на нем девять точек так, чтобы они расположились в форме квадрата, как показано на рис. 13. Перечеркните теперь все точки четырьмя прямыми линиями, не отрывая карандаша от бумаги.

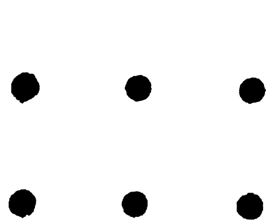


Рис. 13

24. Отделить коз от капусты

А теперь решите задачу, в некотором смысле противоположную предыдущей.

Там мы соединяли точки прямыми линиями, а здесь требуется провести три прямые линии так, чтобы отделить коз от капусты (рис. 14). На рисунке книги проводить прямые линии не следует. Перерисуйте схему расположения коз и капусты в свою тетрадь и после этого попробуйте решить задачу. Можно совсем не проводить линий, а воспользоваться вязальными спицами или тонкими проволочками.

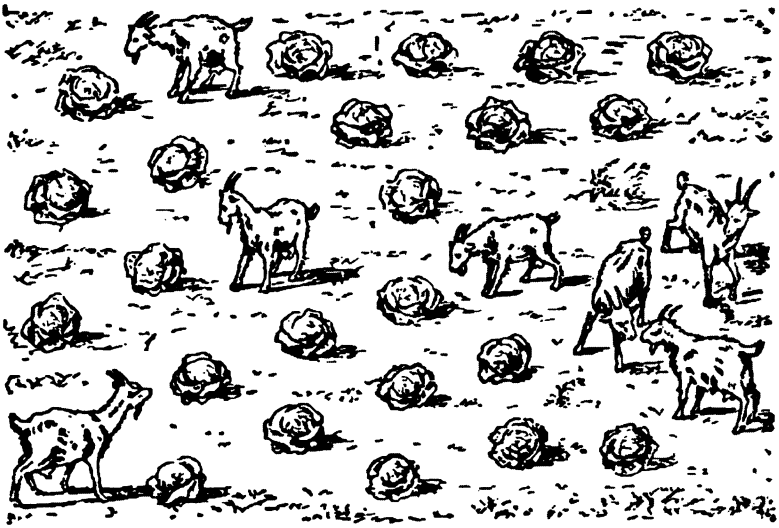


Рис. 14. Нужны срочные меры против этих лакомок

25. Два поезда

Скорый поезд вышел из Москвы в Санкт-Петербург и шел без остановок со скоростью 70 км/час. Другой поезд вышел ему навстречу из Санкт-Петербурга в Москву и тоже шел без остановок со скоростью 60 км/час.

На каком расстоянии будут эти поезда за час до своей встречи?

26. Во время прилива (шутка)

Недалеко от берега стоит корабль со спущенной на воду веревочной лестницей вдоль борта. У лестницы десять ступенек;

расстояние между ступеньками 30 см. Самая нижняя ступенька касается поверхности воды. Океан сегодня очень покоен, но начинается прилив, который поднимает воду за каждый час на 15 см. Через какое время покроется водой третья ступенька веревочной лесенки?

27. Циферблат

а) Разделите циферблат часов (рис. 15) двумя прямыми линиями на три части так, чтобы, сложив числа, в каждой части получить одинаковые суммы.

б) Можно ли этот циферблат разделить на шесть частей так, чтобы в каждой части находились два числа, причем суммы этих двух чисел в каждой из шести частей были бы равны между собой?

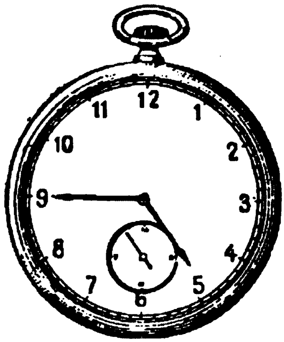


Рис. 15

28. Сломанный циферблат

В музее я видел старинные часы с римскими цифрами на циферблате, причем вместо знакомой нам записи числа четыре (IV) стояли четыре палочки (IIII). Трещины, образовавшиеся на циферблате, делили его на четыре части, как изображено на рис. 16. Суммы чисел в каждой части были неодинаковы: в одной — 21, в другой — 20, в третьей — 20, в четвертой — 17.

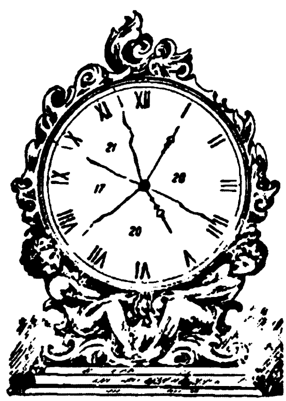


Рис. 16. Трещины делят циферблат на четыре части

Я заметил, что при несколько ином расположении трещин сумма чисел в каждой из четырех частей циферблата равнялась бы 20. При новом расположении трещин они могут и не проходить через центр циферблата. Перерисуйте циферблат в свою тетрадь и найдите это новое расположение трещин.

29. Удивительные часы

Как-то в один дом срочно попросили зайти часовщика.

— Я болен, — ответил часовщик, — и не могу пойти. Но если починка несложная, я пришлю вам своего ученика.

Оказалось, что нужно было поломанные стрелки заменить другими.

— С этим мой ученик справится, — сказал мастер. — Он проверит механизм ваших часов и подберет к ним новые стрелки.

Ученик отнесся к работе очень старательно, и когда закончил осмотр часов, уже стемнело. Считая работу завершенной, он торопливо надел подобранные стрелки и поставил их по своим часам: большую стрелку на цифру 12, а маленькую — на цифру 6 (было ровно шесть часов вечера).

Но вскоре после того, как ученик вернулся в мастерскую, чтобы сообщить мастеру, что работа выполнена, зазвонил телефон. Мальчик взял трубку и услышал сердитый голос заказчика:

— Вы плохо починили часы, они неправильно показывают время!

Ученик мастера, удивленный этим сообщением, поспешил к заказчику. Когда он пришел, отремонтированные часы показывали начало девятого. Ученик протянул свои наручные часы разгневанному хозяину дома:

— Сверьте, пожалуйста. Ваши часы ни на секунду не отстают.

Ошеломленный заказчик вынужден был согласиться, что его часы в данный момент действительно показывают правильное время.

Но на другой день утром заказчик опять позвонил и сказал, что стрелки часов, очевидно, сошли с ума и разгуливают по циферблату, как им вздумается. Ученик мастера побежал к заказчику. Часы показывали начало восьмого. Сверив время по своим часам, он не на шутку рассердился:

— Вы смеетесь надо мной! Ваши часы показывают точное время!

Часы действительно показывали точное время. Возмущенный ученик мастера хотел тут же уйти, но хозяин удержал его. А через несколько минут они нашли причину столь невероятных происшествий.

Догадались ли вы, в чем тут дело?

30. Три в ряд

Расположите на столе девять пуговиц в форме квадрата по три пуговицы на каждой стороне и одну в центре (рис. 17). Если вдоль какой-нибудь прямой линии находятся две пуговицы или более, то такое расположение мы всегда будем называть «рядом». Так, *AB* и *CD* — ряды, в каждом из которых по три пуговицы, а *EF* — ряд из двух пуговиц.

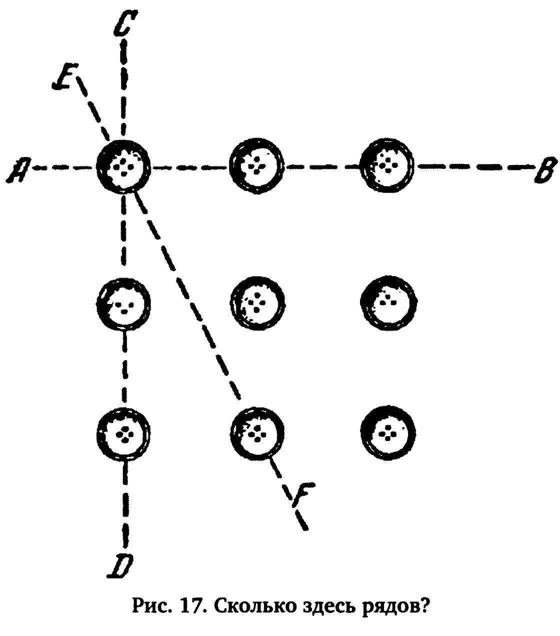


Рис. 17. Сколько здесь рядов?

Определите, сколько на рисунке рядов по три пуговицы в каждом, а сколько — по две пуговицы.

Уберите теперь любые три пуговицы и оставшиеся шесть расположите в три ряда так, чтобы в каждом ряду было по три пуговицы.

31. Десять рядов

Нетрудно догадаться, как расположить шестнадцать шашек в десять рядов по четыре шашки в каждом ряду. Гораздо труднее расположить девять шашек в десять рядов так, чтобы в каждом ряду было по три шашки.

Решите обе задачи.

32. От 1 до 19

В девятнадцати кружках рис. 18 требуется расставить все целые числа от 1 до 19 так, чтобы сумма чисел в любых трех кружках, лежащих на одной прямой, равнялась 30.

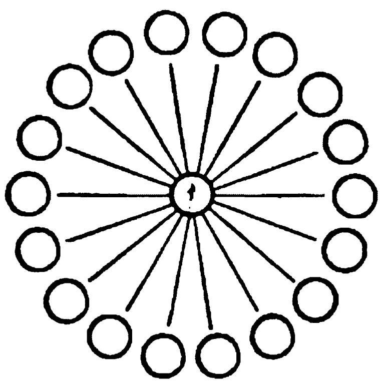


Рис. 18. Расставьте в кружках числа от 1 до 19

33. Быстро, но внимательно

Следующие три задачи решайте «на скорость» — кто быстрее даст правильный ответ.

а) В полдень из Москвы в Тулу выходит автобус с пассажирами. Часом позже из Тулы в Москву выезжает велосипедист и едет по тому же шоссе, но, конечно, значительно медленнее, чем автобус.

Когда пассажиры автобуса и велосипедист встретятся, то кто из них будет дальше от Москвы?

б) В 6 часов стенные часы пробили шесть ударов. По наручным часам я заметил, что время, протекшее от первого удара до шестого, равнялось 30 секундам.

Если для того, чтобы пробить шесть раз, часам понадобилось 30 секунд, то сколько времени будет продолжаться бой часов в полдень или в полночь, когда часы бьют двенадцать раз?

в) Из одной точки вылетели три ласточки. Когда они будут в одной плоскости?

* * *

А теперь спокойными рассуждениями проверьте свои решения и загляните в раздел «Ответы».

Ну как? Не попались ли вы в те небольшие ловушки, которые содержатся в этих несложных задачах?

Такие задачи тем и привлекательны, что обостряют внимание и приучают к осторожности в привычном ходе мыслей.

34. Фигурный рак

Фигурный рак, изображенный на рис. 19, сложен из семнадцати кусочков.

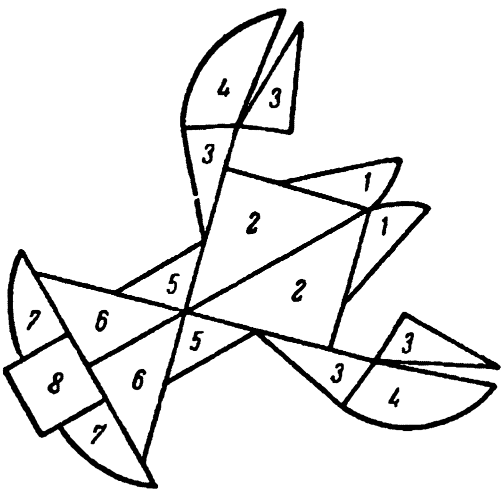


Рис. 19. Из семнадцати кусочков «рака» выложите круг и квадрат

Сложите из кусочков этого рака две фигуры сразу: круг и рядом с ним квадрат.

35. Беспокойная муха

По автомагистрали Москва — Симферополь два спортсмена одновременно начали тренировочный велопробег навстречу друг другу.

В тот момент, когда между велосипедистами осталось всего 300 км, пробегом очень заинтересовалась муха. Слетев с плеча одного велосипедиста и опережая его, она помчалась навстречу другому. Встретив второго велосипедиста и убедившись, что все благополучно, она немедленно повернула обратно. Долетела муха до первого спортсмена и опять повернула ко второму.

Так она и летала между сближавшимися велосипедистами до тех пор, пока спортсмены не встретились. Тогда муха успокоилась и села одному из них на нос.

Муха летала между велосипедистами со скоростью 100 км в час, а велосипедисты все это время ехали со скоростью 50 км в час.

Сколько километров пролетела муха?

36. Перевернутый год

Был ли в XX веке такой год, что если его записать цифрами, а бумажку повернуть верхним краем вниз, то число, образовавшееся на повернутой бумажке, будет выражать тот же год?

37. Две шутки

Первая шутка. Папа позвонил дочке, попросил ее купить кое-какие мелочи, нужные ему к отъезду, и сказал, что деньги лежат в конверте на письменном столе. Девочка, мельком взглянув на конверт, увидела написанное на нем число 98, вынула деньги и, не сосчитав их, положила в сумку, а конверт смяла и выбросила.

В магазине она купила на 90 рублей мелочей, а когда хотела расплатиться, то оказалось, что у нее не только не остается 8 рублей, как она предполагала, но даже не хватает 4 рублей.

Дома она рассказала об этом папе и спросила, не ошибся ли он, когда считал деньги. Отец ответил, что он сосчитал деньги правильно, а ошиблась она сама, и, рассмеявшись, указал ей на ошибку. В чем была ошибка девочки?

Вторая шутка. Приготовьте восемь бумажек с числами 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8 и 9 и расположите их в два столбца как на рис. 20.

Перемещая всего лишь две бумажки, добейтесь того, чтобы суммы чисел в обоих столбцах были одинаковыми.

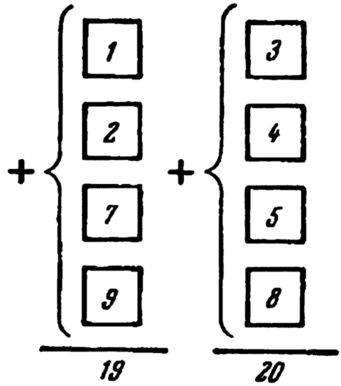


Рис. 20. Уравнять неравные суммы

38. Сколько мне лет?

Когда моему отцу был 31 год, мне было 8 лет, а теперь отец старше меня вдвое. Сколько мне лет теперь?

39. Оцените «на взгляд»

Перед вами два столбца чисел:

123456789	1
12345678	21
1234567	321
123456	4321
12345	54321
1234	654321
123	7654321
12	87654321
1	987654321

Присмотритесь: числа второго столбца образованы из тех же цифр, что и числа первого, но с противоположным порядком их расположения. (Для усиления наглядности нули в левом столбце опущены.)

Какой столбец при сложении даст больший результат?

Сначала сравните эти суммы «на взгляд», то есть, еще не производя сложения, попытайтесь определить, должны ли они быть одинаковыми или одна будет больше другой, а затем проверьте свою догадку сложением.

40. Скоростное сложение

Восемь шестизначных слагаемых

$$+\left\{\begin{array}{r} 328\,645 \\ 491\,221 \\ 816\,304 \\ 117\,586 \\ 671\,355 \\ 508\,779 \\ 183\,696 \\ 882\,414 \end{array}\right.$$

подобраны так, что, разумно их группируя, можно в уме найти сумму за 8 секунд. Выдержите вы такую скорость?

В разделе «Ответы» есть указания, но... вы их искать дольше будете!

А друзьям своим покажите два фокуса, которые в шутку тоже можете назвать «скоростным сложением».

Первый фокус. Скажите: «Не показывая мне, напишите столбиком столько многозначных чисел, сколько вам хочется. Затем я подойду, очень быстро напишу еще столько же чисел и моментально все их сложу».

Допустим, друзья написали:

7621
3057
2794
4518

А вы припишите такие числа, каждое из которых дополняет до 9999 одно за другим все написанные числа. Такими числами будут:

5481
7205
6942
2378

Действительно:

$$\begin{array}{r} + \begin{array}{r}4518\\ \underline{5481}\\ 9999\end{array} \quad + \begin{array}{r}2794\\ \underline{7205}\\ 9999\end{array} \quad + \begin{array}{r}3057\\ \underline{6942}\\ 9999\end{array} \quad + \begin{array}{r}7621\\ \underline{2378}\\ 9999\end{array}\end{array}$$

Теперь нетрудно сообразить, как быстро подсчитать всю сумму:

$$+\left\{\begin{array}{r}7621\\3057\\2794\\4518\\5481\\7205\\6942\\2378\end{array}\right.$$

Нужно 9999 взять четыре раза, то есть 9999 × 4, а такое умножение быстро выполняется в уме. Умножаем 10 000 на 4 и вычитаем лишних 4 единицы. Получается:

$$10\,000 \times 4 - 4 = 40\,000 - 4 = 39\,996.$$

Вот и весь секрет фокуса!

Второй фокус. Напишите одно под другим какие-нибудь два числа любой величины. Я припишу третье и мгновенно, слева направо напишу сумму всех трех чисел.

Положим, вы написали:

72 603 294
51 273 081

Я припишу, например, такое число: 48 726 918 — и сразу назову вам сумму.

Какое число следует приписывать и как в этом случае быстро находить сумму, сообразите сами!

41. Сколько их?

У мальчика столько же сестер, сколько и братьев, а у его сестры вдвое меньше сестер, чем братьев.

Сколько в этой семье братьев и сколько сестер?

42. Одинаковыми цифрами

Пользуясь только сложением, запишите число 28 при помощи пяти двоек, а число 1000 — при помощи восьми восьмерок.

43. Сто

При помощи любых арифметических действий составьте число 100 либо из *пяти единиц*, либо из *пяти пятерок*, причем из пяти пятерок 100 можно составить двумя способами.

44. Арифметический поединок

В математическом кружке нашей школы одно время была такая традиция. Каждому вновь вступающему в кружок учитель предлагал несложную задачу — этакий математический орешек. Решишь задачу — сразу становишься членом кружка.

Помню, как-то дали новичку Вите такую задачу:

«Написано: 1 1 1
3 3 3
5 5 5
7 7 7
9 9 9

Нужно заменить двенадцать цифр нулями так, чтобы при сложении получилось 20». Витя немного подумал и быстро написал:

$$+\left\{\begin{array}{r} 011 \\ 000 \\ 000 \\ 000 \\ 009 \end{array}\right. \atop \overline{\qquad 20} \qquad \text{или} \qquad +\left\{\begin{array}{r} 010 \\ 003 \\ 000 \\ 007 \\ 000 \end{array}\right. \atop \overline{\qquad 20}$$

Потом он улыбнулся и сказал:

«Если у данных пяти трехзначных чисел заменить нулями только девять каких-то цифр, то можно получить при сложении 1111. Попробуйте!»

Ребята принялись за вычисления. И не только решили Витину задачу, но даже нашли еще один вариант ее: у этих же пяти трехзначных чисел можно заменить нулями не девять, а только восемь цифр таким образом, что сумма останется прежней, то есть 1111.

Пришла очередь задуматься Вите. Он раскусил и этот орешек и к удовольствию всех присутствующих нашел еще новое продолжение задачи:

«Можно у пяти данных трехзначных чисел заменить нулями не девять и не восемь, а только шесть цифр, но сумма сохранится все той же — 1111». Учитель математики похвалил всех ребят и сказал, что можно сохранить сумму 1111, заменяя нулями не девять, не восемь и даже не шесть цифр, а только пять.

Найдите решение всех четырех вариантов этой задачи. Придумайте аналогичную задачу для чисел, состоящих не из трех единиц, троек, пятерок, семерок и девяток, а из пяти.

45. Двадцать

Из четырех нечетных чисел легко составить сумму, равную 10, а именно:

$$1 + 1 + 3 + 5 = 10,$$

или так:

$$1 + 1 + 1 + 7 = 10.$$

Возможно и третье решение:

$$1 + 3 + 3 + 3 = 10.$$

Других решений нет (изменения в порядке следования слагаемых, конечно, не образуют *новых* решений).

Значительно больше различных решений имеет такая задача.

Составить число 20, складывая ровно восемь нечетных чисел, среди которых также разрешается иметь и одинаковые слагаемые.

Найдите *все различные* решения этой задачи и установите, сколько среди них будет таких сумм, которые содержат наибольшее число *неодинаковых* слагаемых.

Маленький совет. Если вы будете подбирать числа наудачу, то и в этом случае натолкнетесь на несколько решений, но бессистемные пробы не дадут уверенности в том, что вы исчерпали все решения. Если же в «способ проб» вы внесете некоторый порядок, систему, то ни одно из возможных решений от вас не ускользнет.

46. Сколько маршрутов?

Школьники в математическом кружке вычертили план шестнадцати кварталов своего города. На прилагаемой схеме плана (рис. 21) все кварталы условно изображены одинаковыми квадратами.

Сколько *разных* маршрутов можно наметить от пункта *A* к пункту *C*, если двигаться по улицам города только вперед и вправо, вправо и вперед? Отдельными своими частями маршруты могут совпадать (см. пунктирные линии на схеме плана).

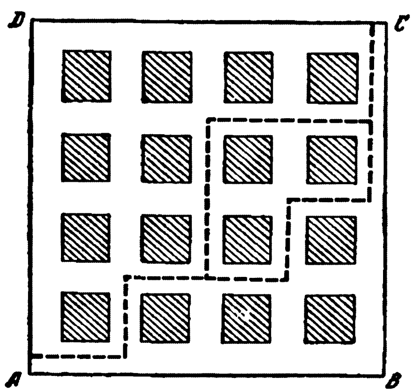


Рис. 21. Сколько маршрутов ведет от А к С?

Школьники насчитали семьдесят разных маршрутов. Верно ли они решили эту задачу?

47. Изменить расположение чисел

На концах пяти диаметров все порядковые числа от 1 до 10 расположены так, как показано на рис. 22. При таком расположении только в одном случае сумма двух соседних чисел равна сумме двух противоположно расположенных чисел, а именно:

$$10 + 1 = 5 + 6,$$

но, например,

$$1 + 2 \neq 6 + 7$$

или

$$2 + 3 \neq 7 + 8.$$

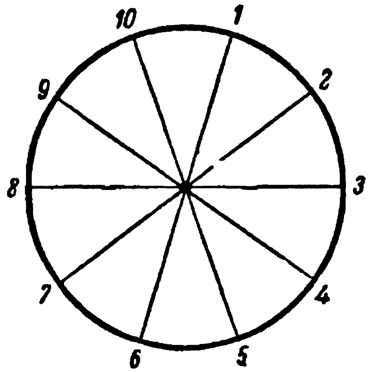


Рис. 22

Переместите данные числа так, чтобы сумма любых двух соседних чисел равнялась сумме соответствующих двух противоположно расположенных чисел.

Можно ожидать, что эта задача имеет не одно решение, то есть разные расположения данных чисел удовлетворяют условию задачи.

Попытайтесь найти такой путь решения задачи, который позволит установить и число всех возможных решений.

48. Разные действия, один результат

Если между двумя двойками знак сложения заменить знаком умножения, то результат не изменится. Действительно: $2 + 2 = 2 \times 2$. Нетрудно подобрать и три числа, обладающих тем же свойством, а именно: $1 + 2 + 3 = 1 \times 2 \times 3$. Есть и четыре однозначных числа, которые, будучи сложены или умножены друг на друга, дают один и тот же результат.

Кто быстрее подберет эти числа? Готово? Продолжайте состязание! Найдите пять, потом шесть, затем семь и т.д. однозначных чисел, обладающих тем же свойством. Имейте в виду при этом, что, начиная с группы в пять чисел, ответы могут быть различными.

49. Девяносто девять и сто

Сколько нужно поставить знаков «плюс» (+) между цифрами числа 987 654 321, чтобы в сумме получилось 99?

Возможны два решения. Найти хотя бы одно из них нелегко, но зато вы приобретете опыт, который поможет вам быстро расставить знаки «плюс» между семью числами 1 2 3 4 5 6 7 так, чтобы в сумме получилось 100 (расположение цифр изменять не разрешается).

50. Разборная шахматная доска

Веселый шахматист разрезал свою картонную шахматную доску на четырнадцать частей, как показано на рис. 23. Получилась разборная шахматная доска. Товарищам, приходившим к нему играть в шахматы, он предварительно предлагал головоломку: составить из этих четырнадцати частей шахматную доску. Вырежьте из бумаги в клетку такие же фигуры и убедитесь сами — трудно или легко из них составить шахматную доску.

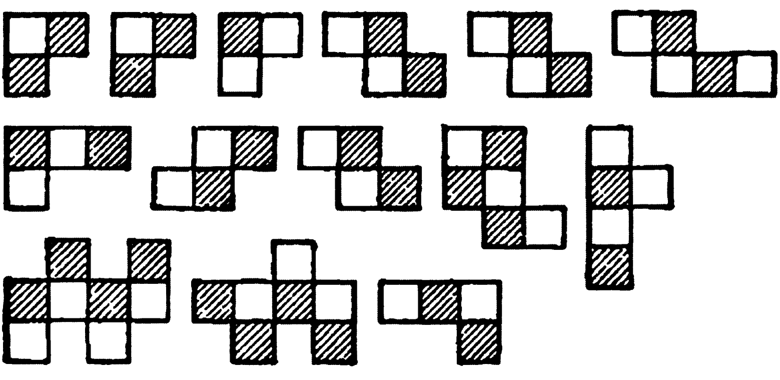


Рис. 23. Так веселый шахматист разрезал шахматную доску

51. Поиски мины

По окончании полевых занятий с группой суворовцев полковник решил предложить своим воспитанникам задачу на смекалку. Он вынул план местности, расчерченный на квадраты (рис. 24), и сказал:

«Два сапера с миноискателями должны обследовать эту местность, чтобы обезвредить вражеские мины. Для этого необходимо обойти все клетки местности, кроме центральной, которую занимает небольшой пруд. В ту клетку, где побывал один сапер, другому идти не следует. Двигаться можно только по горизонтали и вертикали, по диагоналям перемещаться нельзя. Один сапер начинает свой маршрут с клетки *A* и выходит на клетку *B*, другой начинает с клетки *B* и выходит на клетку *A*. Наметьте возможные маршруты саперов так, чтобы каждый из них прошел через одинаковое количество клеток. Эти несколько необычные условия я предлагаю лишь для проверки вашей смекалки».

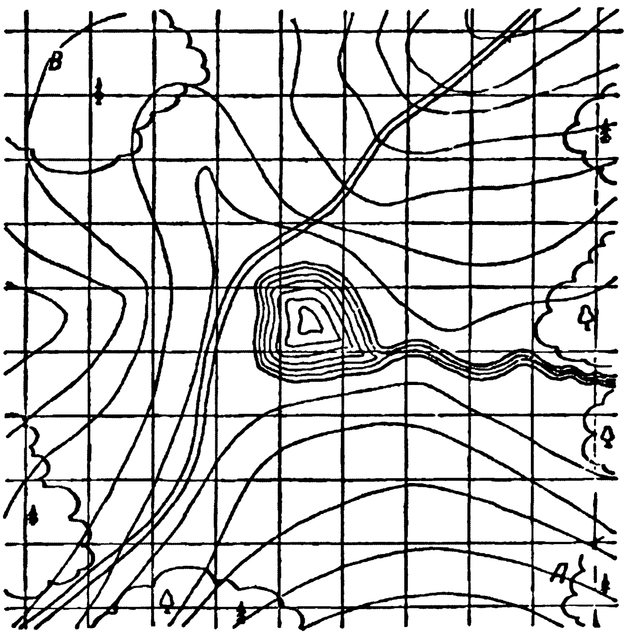


Рис. 24. Два сапера должны обследовать эту местность

Суворовцы перенесли план в свои тетради и через некоторое время справились с задачей. Полковник похвалил их за смекалку. Решите и вы задачу полковника.

52. Собрать в группы по две

Десять спичек положены в ряд. Я могу их распределить на пять пар, перескакивая каждый раз одной спичкой через две — например, так, как показано на рис. 25.

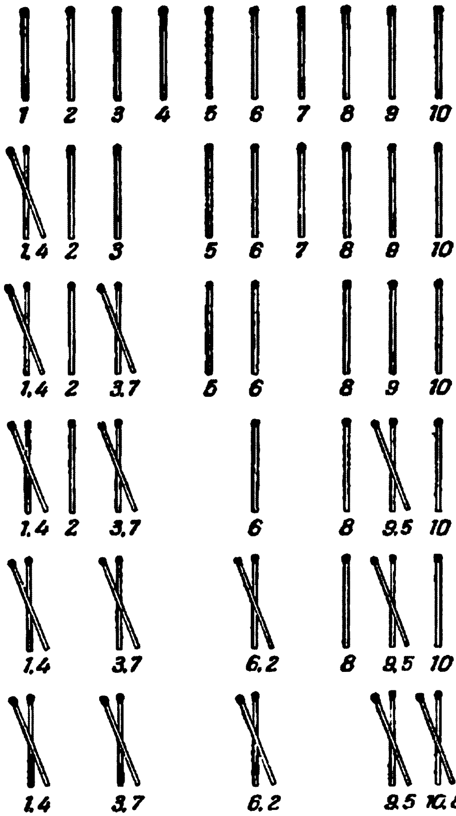


Рис. 25. Десять спичек — в пять пар, перескакивая через две спички

Найдите совсем другой порядок распределения спичек данного ряда на пять пар при соблюдении тех же условий.

53. Собрать в группы по три

Пятнадцать спичек положены в ряд (рис. 26). Требуется собрать их в пять групп по три спички в каждой. Перекладывать спички можно только по одной, каждый раз перескакивая через три спички.

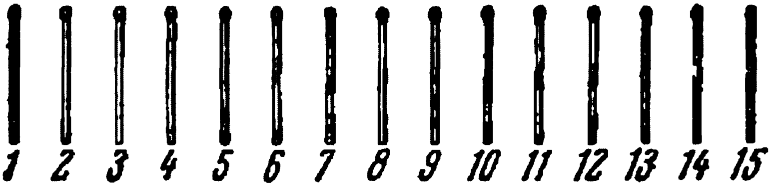


Рис. 26

Эта задача потруднее предыдущей. Решите ее в десять переложений. Чтобы иметь возможность сличить свое решение с ответом, записывайте порядок перемещения спичек.

Замечание. Обобщение задач 52 и 53 приводит к выводу, что для составления групп по n спичек в каждой путем перекладывания каждой спички через n других спичек необходимо $5n$ спичек.

54. Часы остановились

У меня нет наручных часов, а только стенные, которые остановились. Я отправился к своему знакомому, часы которого идут безукоризненно, узнал время и, не задерживаясь долго, вернулся домой. Дома я быстро произвел несложные вычисления и поставил стрелки стенных часов в положение, соответствующее точному времени.

Как я действовал и как рассуждал, если предварительно мне не было известно, сколько времени занимает дорога?

55. Четыре действия арифметики

Перед вами семь строк последовательно расположенных цифр:

1 2 3 = 1
1 2 3 4 = 1
1 2 3 4 5 = 1
1 2 3 4 5 6 = 1
1 2 3 4 5 6 7 = 1
1 2 3 4 5 6 7 8 = 1
1 2 3 4 5 6 7 8 9 = 1

Не меняя порядка расположения цифр, поставьте между ними знаки арифметических действий с таким расчетом, чтобы в результате этих действий в каждом ряду получилось бы по 1. Действия должны выполняться в порядке следования — слева направо, так что сложение, например, может предшествовать умножению. При записи в этом случае, как вы знаете, следует ставить скобки.

Если понадобится, то две рядом стоящие цифры можете считать двузначным числом.

56. Озадаченный водитель

О чем подумал водитель, когда посмотрел на счетчик спидометра своей машины (рис. 27)? Счетчик показывал число 15 951. Водитель заметил, что количество километров, пройденных

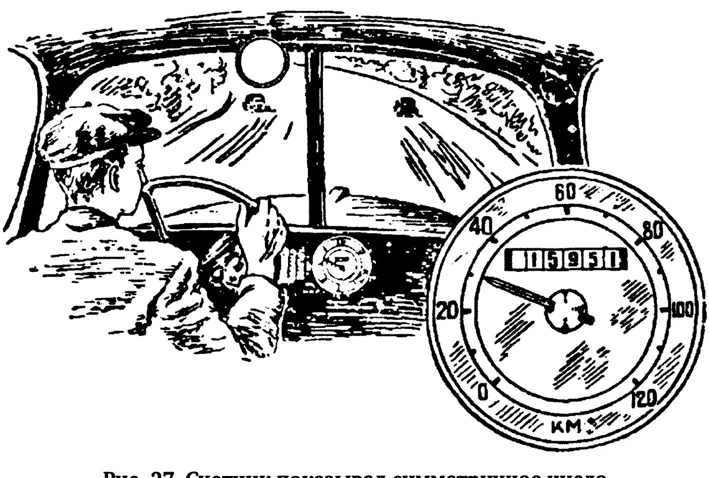


Рис. 27. Счетчик показывал симметричное число

машиной, выражалось симметричным числом, то есть таким, которое читалось одинаково как слева направо, так и справа налево:

15 951.

— Занятно!.. — пробормотал водитель. — Теперь нескоро, наверное, появится на счетчике другое число, обладающее такой же особенностью.

Однако ровно через два часа счетчик показал новое число, которое тоже в обе стороны читалось одинаково.

Определите, с какой скоростью ехал эти два часа водитель.

57. Для Цимлянского гидроузла

В выполнении срочного заказа по изготовлению измерительных приборов для Цимлянского гидроузла приняла участие бригада в составе опытного бригадира и девяти молодых рабочих.

В течение дня каждый из юных рабочих смонтировал по 15 приборов, а бригадир — на 9 приборов больше, чем в среднем каждый из десяти членов бригады.

Сколько всего измерительных приборов было смонтировано бригадой за один рабочий день?

58. В дачной электричке

В вагоне электрички ехали из города на дачу две подруги-школьницы.

— Я замечаю, — сказала одна из них, — что обратные электрички нам встречаются через каждые 5 минут. Как ты думаешь, сколько электричек прибывает в город в течение одного часа, если скорости электричек в обоих направлениях одинаковы?

— Конечно, 12, так как 60 : 5 = 12, — сказала вторая подруга.

Но школьница, задавшая вопрос, не согласилась с решением подруги и привела ей свои соображения.

А что вы думаете по этому поводу?

59. От 1 до 1 000 000 000

Рассказывают, что когда девятилетнему Гауссу[1] учитель предложил найти сумму всех целых чисел от 1 до 100, $1 + 2 + 3 + \dots + 98 + 99 + 100$, то маленький Гаусс сам сообразил, каким способом можно очень быстро выполнить это сложение.

Нужно складывать первое число с последним, второе с предпоследним и т. д. Сумма каждой такой пары чисел равна 101 и повторяется она 50 раз.

Следовательно, сумма всех целых чисел от 1 до 100 будет равна $101 \times 50 = 5050$.

Этот же прием используйте для решения более трудной задачи:

найти сумму всех *цифр* у всех целых чисел
от 1 до 1 000 000 000.

Обратите внимание: здесь речь идет не о сумме *чисел*, а о сумме *цифр* всех чисел!

60. Страшный сон футбольного болельщика

Болельщик, огорченный поражением своей команды, спал беспокойно. Ему снилась большая квадратная комната без мебели. В комнате тренировался вратарь. Он ударял футбольный мяч о стену, а затем ловил его.

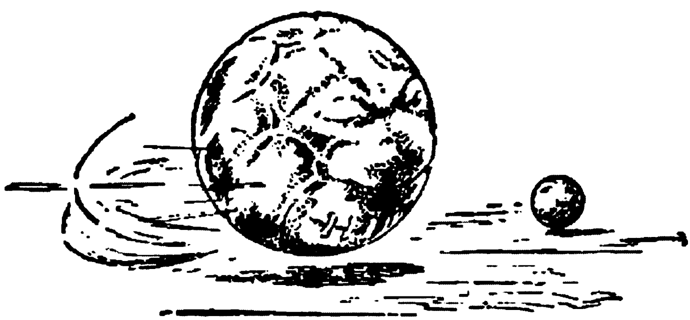


Рис. 28. Шар стремился раздавить мячик

[1] К. Ф. Гаусс (1777–1855) — крупнейший немецкий математик.

Вдруг вратарь стал уменьшаться, уменьшаться и наконец превратился в маленький мячик от настольного тенниса, а футбольный мяч оказался чугунным шаром. Шар бешено кружился по гладкому полу комнаты, стремясь раздавить маленький мячик (рис. 28). Бедный мячик в отчаянии метался из стороны в сторону, выбиваясь из сил и не имея возможности подпрыгнуть.

Мог ли он, не отрываясь от пола, все-таки укрыться где-нибудь от преследований чугунного шара?

Раздел II

Для решения задач второго раздела требуется знакомство с действиями над простыми и десятичными дробями.

Читатель, еще не изучавший дроби, может пропустить задачи этого раздела и перейти к следующим главам.

61. Лестница

В доме шесть этажей. Скажите, во сколько раз путь по лестнице на шестой этаж длиннее, чем путь по той же лестнице на третий этаж, если пролеты между этажами имеют по одинаковому числу ступенек?

62. Головоломка

Какой знак нужно поставить между написанными рядом цифрами 2 и 3, чтобы получилось число больше двух, но меньше трех?

63. Интересные дроби

Если к числителю и знаменателю дроби $\frac{1}{3}$ прибавить ее знаменатель, то дробь увеличится вдвое.

Найдите такую дробь, которая от прибавления знаменателя к ее числителю и знаменателю увеличилась бы: а) втрое; б) вчетверо.

(Знающие алгебру могут обобщить задачу и решить ее с помощью уравнения.)

64. Какое число?

Половина — треть его. Какое это число?

65. Путь школьника

Каждое утро Боря проделывает довольно длинный путь в школу.

На расстоянии $\frac{1}{4}$ пути от дома до школы расположено здание с часами на фасаде, а на расстоянии $\frac{1}{3}$ всего пути — железнодорожная станция. Когда Боря проходил мимо здания, то на часах обычно было 7 часов 30 минут, а когда он доходил до станции, то часы показывали без 25 минут 8 часов.

Когда Боря выходил из дому и в какое время он приходил в школу?

66. На стадионе

Вдоль беговой дорожки расставлено 12 флажков на равных расстояниях друг от друга. Старт у первого флажка. У восьмого флажка спортсмен был через 8 секунд после начала бега. Через сколько секунд при неизменной скорости он окажется у двенадцатого флажка?

Не попадите впросак!

67. Будильник

Будильник отстает на 4 минуты в час; $3\frac{1}{2}$ часа назад он был поставлен точно. Сейчас на часах, показывающих точное время, ровно 12.

Через сколько минут на будильнике тоже будет 12?

68. Брусок мыла

На одну чашку весов положен брусок мыла, на другую $\frac{3}{4}$ такого же бруска и еще $\frac{3}{4}$ кг. Весы в равновесии.

Сколько весит брусок?

69. Арифметические орешки

Задача 1. Двумя цифрами написать наименьшее целое положительное число.

Задача 2. Число 37 записано при помощи пяти троек:

$$37 = 33 + 3 + \frac{3}{3}.$$

Найдите другой способ выразить число 37 при помощи пяти троек.

Задача 3. Написать 100 шестью одинаковыми цифрами.

Задача 4. Написать 55 пятью четверками.

Задача 5. Написать 20 при помощи четырех девяток.

Задача 6. Из семи спичек выложено число $\frac{1}{7}$ (рис. 29). Превратить эту дробь в число $\frac{1}{3}$, не прибавляя и не убавляя спичек.

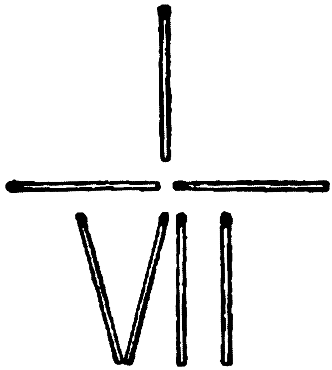


Рис. 29

Задача 7. Написать 20 при помощи цифр 1, 3, 5 и 7, причем каждую из них взять ровно по три раза.

Задача 8. Сумма двух чисел, образованных из цифр 1, 3, 5, 7 и 9, равна сумме двух чисел, образованных из цифр 2, 4, 6 и 8. Найдите эти числа, взяв каждую цифру по одному разу.

Примечание. Применять неправильные дроби при этом не разрешается.

Задача 9. Какие два числа при умножении одного на другое и при вычитании одного из другого дают один и тот же результат?

Таких пар чисел неисчислимо много. Как образуются эти пары?

Задача 10. Из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 составить две равные дроби, сумма которых равна 1. Взять необходимо все цифры и притом каждую из них только по одному разу. (Возможно несколько решений.)

Задача 11. Взяв по одному разу каждую из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, составить такие смешанные дроби, сумма которых будет равна 100. (Возможно несколько решений.)

70. Дроби-домино

Выньте из ящика домино все кости, обе половины которых содержат по одинаковому количеству очков (дубли), и кости, не содержащие очков хотя бы на одной половине (бланши). Оставшиеся пятнадцать костей можно рассматривать как дроби и расположить их в такие три ряда, сумма дробей в каждом из которых равна $2\frac{1}{2}$ (рис. 30).

Любопытно, что, перераспределяя эти пятнадцать костей домино, можно образовать такие ряды дробей, сумма которых будет числом целым (но, вообще говоря, разным в разных рядах).

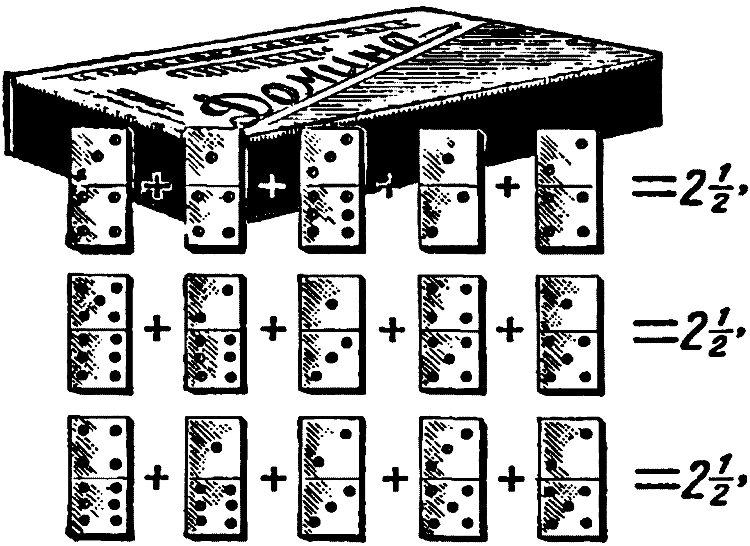


Рис. 30. Сумма дробей в каждом ряду равна $2\frac{1}{2}$

Используя некоторые из костей домино как неправильные дроби, например $\frac{4}{3}$, $\frac{6}{1}$, $\frac{3}{2}$ и т.д., попробуйте расположить все пятнадцать костей в три ряда по пять костей в каждом, но так, чтобы сумма дробей в каждом ряду равнялась числу 10.

С первого раза это, конечно, не выйдет. Придется подумать и попрактиковаться.

Какие числа, кроме указанных в этой задаче, вам удалось бы получить, располагая кости домино в три ряда и складывая соответствующие дроби (сумма во всех трех рядах должна быть одна и та же)?

71. Мишины котята

Увидит Миша где-нибудь брошенного котенка, непременно подберет и принесет домой. Всегда воспитывается у него несколько котят, а сколько именно, он не любил говорить, чтобы над ним не смеялись.

Бывало, спросят у него:

— Сколько у тебя теперь котят?

— Немного, — ответит он. — Три четверти их числа, да еще три четверти одного котенка.

Товарищи думали, что он просто балагурит. А между тем Миша давал им задачу, которую совсем нетрудно решить. Попробуйте!

72. Средняя скорость

Половину пути лошадь шла порожняком со скоростью 12 км/час. Остальной путь она шла с возом, делая 4 км/час.

Какова средняя скорость, то есть с какой неизменной скоростью нужно было бы двигаться лошади, чтобы на весь путь потребовалось такое же количество времени?

73. Спящий пассажир

Когда пассажир проехал половину всего пути, то лег спать и спал до тех пор, пока не осталось ехать половину того пути, что он проехал спящим. Какую часть всего пути он проехал спящим?

74. Велосипедист

Когда велосипедист проехал $\frac{2}{3}$ пути, лопнула шина. На остальной путь пешком он затратил вдвое больше времени, чем на велосипедную езду.

Во сколько раз велосипедист ехал быстрее, чем шел?

75. Соревнование

Молодые токари Володя и Костя, получив от мастера по одинаковому наряду на изготовление партии деталей, хотели выполнить свои задания одновременно и раньше срока.

Через некоторое время оказалось, однако, что Костя сделал лишь половину того, что осталось делать Володе, а Володе осталось делать половину того, что он уже сделал.

Во сколько раз должен был бы теперь увеличить свою дневную выработку Костя по сравнению с Володей, чтобы *одновременно* с ним успеть выполнить свой наряд?

76. Кто прав?

Маша решала арифметическую задачу. Последнее действие заключалось в определении объема земляных работ, а для этого нужно было вычислить произведение трех чисел.

Маша благополучно перемножила первые два числа и только было приготовилась умножать получившийся результат на третье число, как вдруг заметила, что второй сомножитель был неправильно ею записан; он оказался больше того числа, которое должно было быть по условию, на $\frac{1}{3}$ его.

Тогда Маша, чтобы не переделывать заново уже выполненное действие, решила, что все равно получит правильный результат, если теперь третий сомножитель предварительно уменьшит на $\frac{1}{3}$ его самого, тем более что он был равен второму сомножителю.

— Так делать нельзя, — сказала ей подруга, — ты при этом ошиблась на 20 кубометров.

— Какая же тут может быть ошибка? — возразила Маша. — Раз одно число я взяла увеличенным, а другое, равное ему, на такую же часть уменьшенным, то я думаю, что произведение осталось без изменения.

Кто прав?

И не сможете ли вы, пользуясь приведенными данными, найти решение задачи?

77. К ужину — три поджаренных ломтика

Мама очень вкусно поджаривает ломтики хлеба, используя для этого маленькую сковородку. Поджарив одну сторону каждого ломтика, она переворачивает его на другую сторону. Поджаривание каждой стороны ломтика длится 30 секунд, а на сковородке умещается рядом только два ломтика.

Сообразите, каким образом при этих условиях мама поджаривает обе стороны трех ломтиков только за $1\frac{1}{2}$ минуты, а не за 2.

Глава вторая

ЗАТРУДНИТЕЛЬНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ

78. Смекалка кузнеца Хечо

Путешествуя прошлым летом по Грузии, мы иногда развлекались тем, что придумывали всевозможные необыкновенные истории, навеянные каким-нибудь памятником старины.

Как-то раз подошли мы к одинокой древней башне (рис. 31). Осмотрели ее, присели отдохнуть. А был среди нас студент-математик, и он тут же придумал занятную задачу:

«Назад тому лет триста жил здесь князь злой и надменный. Была у князя дочь-невеста, Дариджан по имени. Обещал князь свою Дариджан в жены богатому соседу, а она полюбила простого парня, кузнеца Хечо. Попытались было Дариджан и Хечо убежать в горы от неволи, но поймали их слуги князевы.

Рассвирепел князь и решил назавтра казнить обоих, на ночь же приказал их запереть вот в эту высокую и мрачную недостроенную башню, а вместе с ними еще и служанку Дариджан, девочку-подростка, которая помогала им бежать.

Не растерялся в башне Хечо, осмотрелся, поднялся по ступенькам в верхнюю часть башни, в окно выглянул — прыгать невозможно, разобьешься. Тут заметил Хечо около окна забытую строителями веревку, перекинутую через заржавленный блок, укрепленный повыше окна. К концам веревки были привязаны пустые корзины, к каждому концу — по корзине. Хечо вспомнил, что при помощи этих корзин каменщики поднимали вверх кирпич, а вниз спускали щебень, причем если вес груза в одной корзине превышал вес груза в другой примерно на 5–6 кг (в переводе на современные меры), то корзина довольно плавно опускалась на землю; другая корзина в это время поднималась к окну.

Рис. 31. Мы подошли к мрачной древней башне...

Хечо на глаз определил, что Дариджан весит около 50 кг, служанка не более чем 40 кг. Свой вес Хечо знал — около 90 кг. Кроме того, он нашел в башне цепь весом 30 кг. Так как в каждой корзине могли поместиться человек и цепь или даже два человека, то им всем троим удалось спуститься на землю, причем делали они это так, что ни разу вес опускающейся корзины с человеком не превышал веса поднимающейся корзины более чем на 10 кг.

Как они выбрались из башни?»

79. Кот и мыши

Кот Мурлыка только что «помогал» своей юной хозяйке решать задачи. Теперь он сладко спит, а во сне видит себя окруженным тринадцатью мышами. Двенадцать мышей серых, а одна — белая (рис. 32). И слышит кот, говорит кто-то знакомым голосом: «Мурлыка, ты должен съедать каждую тринадцатую мышку, считая их по кругу все время в одном направлении, с таким расчетом, чтобы *последней* была съедена *белая* мышь».

Рис. 32. С какой мышки начать?

Но с какой мышки начать, чтобы правильно решить задачу? Помогите Мурлыке.

80. Спички вокруг монеты

Заменим кота монетой, а мышек — спичками. Требуется снять все спички, кроме той, которая обращена головкой к монете (рис. 33), соблюдая следующее условие: *сначала снять одну спичку*, а затем, двигаясь вправо по кругу, снимать каждую тринадцатую спичку.

Сообразите, какую спичку нужно снять первой.

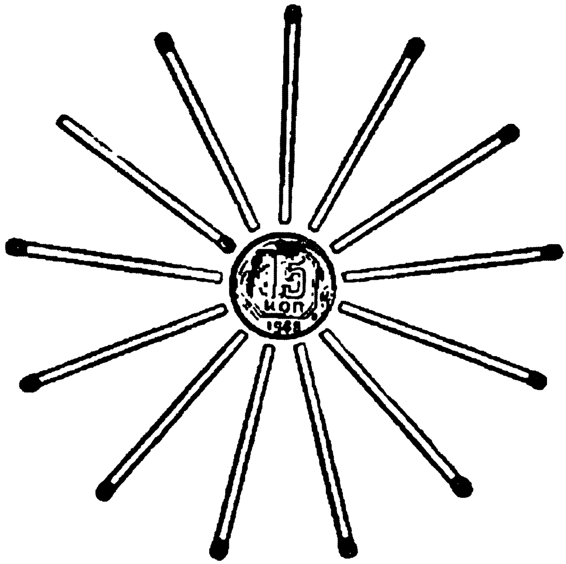


Рис. 33. С какой спички начать?

81. Разложить монеты

Возьмите семь спичек и шесть монет. Спички разложите на столе звездочкой, как показано на рис. 34. Начиная от любой спички, отсчитайте по движению стрелки часов третью и около ее головки положите монету. Затем опять отсчитайте третью спичку в том же направлении, начиная от любой спички, *против которой еще не лежит монета*, и также около головки положите монету. Действуя таким образом, постарайтесь разложить все шесть монет около головок шести спичек. При отсчете спичек не следует пропускать и тех, около которых уже положена монета. Начинать отсчет нужно обязательно со спички, не имеющей около себя монеты. Двух монет на одно место класть нельзя.

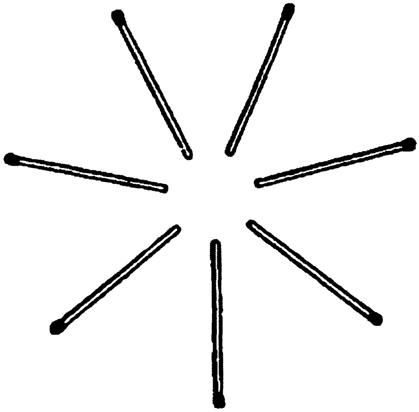


Рис. 34

Каким нужно руководствоваться правилом, чтобы наверняка решить задачу?

82. Пропустить пассажирский!

На полустанке одноколейной железной дороги остановился поезд в составе паровоза и пяти вагонов. Он доставил бригаду рабочих для строительства новой ветки. Пока на этом полустанке имелся только небольшой тупичок, в котором в случае необходимости едва мог бы поместиться паровоз с двумя вагонами (рис. 35).

Рис. 35. Как пропустить пассажирский?

Вскоре следом за поездом со строительной бригадой подошел к этому же полустанку пассажирский поезд. Как пропустить пассажирский?

83. Задача, возникшая из-за каприза трех девочек

Тема этой задачи имеет почтенную давность[1]. Три девочки, каждая со своим папой, гуляли. Все шестеро подошли к реке и пожелали переправиться с одного берега на другой. В их распоряжении оказалась всего одна лодка без гребца, поднимающая только двух человек. Переправу было бы, разумеется, нетрудно осуществить, если бы девочки не заявили (то ли из каприза, то ли из шалости), что ни одна из них не согласна ехать в лодке или быть на берегу с одним или двумя чужими папами без своего папы. Девочки были маленькие, но не очень, так что каждая из них могла вести лодку самостоятельно.

Таким образом, неожиданно возникли дополнительные условия переправы, но ради забавы путники решили попытаться их выполнить. Как они действовали?

84. Дальнейшее развитие задачи

Веселая компания благополучно переправилась на противоположный берег реки и уселась отдыхать. Возник вопрос: можно ли было бы при тех же условиях организовать переправу четырех пар? Очень скоро выяснилось, что при сохранении условий, выдвинутых девочками (см. предыдущую задачу), переправу четырех пар можно было бы осуществить только при наличии лодки, поднимающей трех человек, причем всего лишь в пять приемов.

Каким образом?

Развивая тему задачи еще дальше, наши путешественники нашли, что и на лодке, вмещающей только двух человек, можно переправить с одного берега на другой четырех девочек с их папами, если посреди реки есть остров, на котором можно делать промежуточную остановку и высаживаться. В этом случае для

---

[1] В несколько иной редакции она встречается в сочинении XIII века.

окончательной переправы требуется совершить не менее двенадцати переездов при соблюдении того же условия, то есть что ни одна девочка не будет находиться ни в лодке, ни на острове, ни на берегах с чужим папой без своего папы.

Найдите и это решение.

85. Прыгающие шашки

Положите три белые шашки на квадраты 1, 2, 3 (рис. 36), а три черные на квадраты 5, 6, 7. Пользуясь свободным квадратом 4, передвиньте белые шашки на место черных, а черные на место белых, при этом придерживайтесь следующего правила: шашки можно передвигать на соседний свободный квадрат. Разрешается также и прыгать через соседнюю шашку, если за ней есть свободный квадрат. Белые и черные шашки могут двигаться навстречу друг другу. Ходы в обратном направлении не разрешаются. Задача решается в пятнадцать ходов.

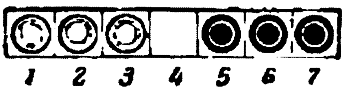


Рис. 36

86. Белое и черное

Возьмите четыре белые и четыре черные шашки (или четыре желтые и четыре белые монеты) и положите их на стол в ряд, чередуя цвет: белую, черную, белую, черную и т.д. Слева или справа оставьте такое свободное место, на котором могли бы уместиться не более чем две шашки (монеты). Пользуясь свободным местом, можно перемещать каждый раз только *по две рядом лежащие* шашки (монеты), не изменяя при этом взаимного их расположения.

Достаточно сделать четыре таких перемещения пар шашек, чтобы оказались подряд все черные, а за ними все белые.

Убедитесь в этом!

87. Усложнение задачи

С увеличением числа первоначально взятых шашек (монет) задача усложняется.

Так, если вы поместите в ряд пять белых и пять черных шашек, чередуя их цвет, то потребуется пять перемещений, чтобы расположить черные шашки с черными, а белые — с белыми.

В случае *шести* пар шашек потребуется шесть перемещений; в случае *семи* пар — семь перемещений и т.д. Найдите решения задачи для пяти, шести и семи пар шашек.

Помните, что при первоначальной раскладке следует оставлять слева (или справа) свободное место не более чем для двух шашек и перемещать каждый раз по две шашки без изменения их взаимного расположения.

88. Карточки укладываются по порядку номеров

Нарежьте из картона десять карточек размером 4 × 6 см и пронумеруйте их числами от 1 до 10. Сложив карточки стопкой, возьмите их в руку. Начиная с верхней карточки, кладите первую на стол, вторую под низ стопки, третью на стол, четвертую под низ стопки. Делайте так до тех пор, пока не положите на стол все карточки.

С уверенностью можно сказать, что карточки расположатся не по порядку номеров.

Подумайте, в какой последовательности нужно первоначально сложить карточки в стопку, чтобы при указанном способе раскладки они расположились в порядке номеров от 1 до 10.

89. Две головоломки расположения

Первая головоломка. Двенадцать шашек (монет, кусочков бумаги и т.д.) нетрудно расположить на столе в форме квадратной рамки по четыре шашки вдоль каждой стороны. Но попробуйте положить эти шашки так, чтобы вдоль каждой стороны квадрата их было по пять (рис. 37).

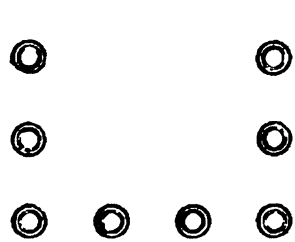


Рис. 37. Как положить эти шашки по пять с каждой стороны?

Вторая головоломка. Разложите на столе двенадцать шашек так, чтобы образовалось три ряда по горизонтали и три ряда по вертикали и чтобы в каждом из этих рядов лежало по четыре шашки.

90. Загадочная шкатулка

Летом Миша отдыхал в Артеке и привез оттуда в подарок своей младшей сестре Ирочке красивую шкатулку, украшенную 36 ракушками. На крышке шкатулки выжжены линии так, что они делят ее на 8 секций.

Ирочка в школу еще не ходит, но умеет считать до 10. Больше всего ей в подарке брата понравилось то, что вдоль каждой стороны крышки шкатулки расположено ровно по 10 ракушек (рис. 38). Считая ракушки вдоль стороны, Ирочка учитывает все ракушки, находящиеся в примыкающей к этой стороне секции. Ракушки, расположенные в угловых секциях, Ирочка присчитывает и к той и к другой стороне.

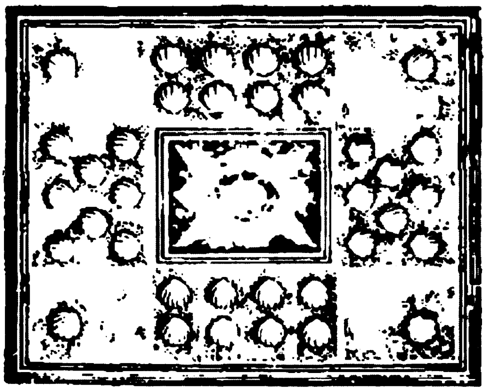


Рис. 38. Вдоль каждой стороны крышки шкатулки — 10 ракушек

Однажды мама, протирая шкатулку тряпочкой, нечаянно раздавила 4 ракушки. Теперь уже не будет по 10 ракушек вдоль каждой стороны крышки. Какая неприятность! Придет Ирочка из детского сада и очень огорчится.

— Беда не велика, — успокоил маму Миша.

Он осторожно отклеил часть ракушек из оставшихся 32 и так умело наклеил их снова на крышку шкатулки, что вдоль каждой ее стороны стало опять по 10 ракушек.

Прошло несколько дней. Снова беда! Шкатулка упала, разбилось еще 6 ракушек; осталось их только 26. Но и в этот раз Миша смекнул, как надо расположить оставшиеся 26 ракушек на крышке, чтобы вдоль каждой ее стороны Ирочка по-прежнему могла насчитать по 10 ракушек. Правда, оставшиеся ракушки в последнем случае невозможно было распределить на крышке шкатулки так же симметрично, как прежде, но Ирочка на это не обратила внимания.

Найдите оба Мишины решения.

91. Отважный гарнизон

Рис. 39. Снежную крепость защищает отважный гарнизон

Снежную крепость защищает отважный гарнизон (рис. 39). Ребята отразили пять штурмов, но не сдались. В начале игры гарнизон состоял из 40 человек. Комендант снежной крепости первоначально расставил силы по схеме, показанной в квадратной рамке слева (в центральном квадрате — общая численность гарнизона).

1	9	1
9	40	9
1	9	1

Противник видел, что каждую из 4 сторон крепости защищают 11 человек. По условию игры при первом, втором, третьем и четвертом штурмах гарнизон терял каждый раз по 4 человека. В последний, пятый, штурм неприятель своими снежками вывел из строя еще 2 человек. И все же, несмотря на потери, после каждого штурма любую из сторон снежной крепости продолжало защищать по 11 человек.

Как комендант снежной крепости расставлял силы своего гарнизона после каждого штурма?

92. Размещение подопытных кроликов

В одном институте была изготовлена для специальных опытов и наблюдений над кроликами особая двухэтажная клетка по 9 секций на каждом этаже (рис. 40). Для кроликов предназначалось 16 секций (8 на верхнем этаже и 8 на нижнем), а 2 центральные секции были заняты приборами.

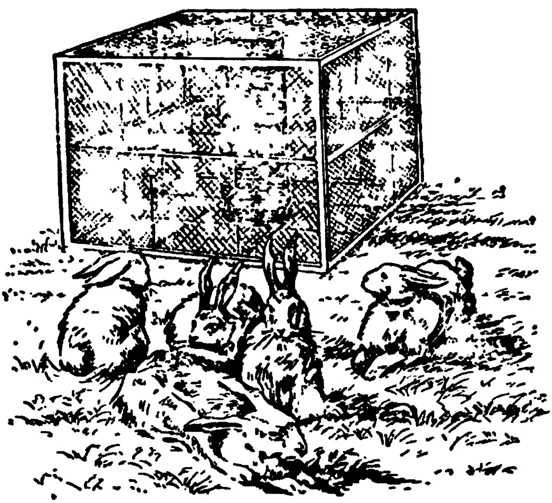


Рис. 40. Для опытов была приготовлена клетка

По условиям опыта кроликов необходимо было разместить в клетке так, чтобы:

1) были заняты все 16 секций;

2) в каждой секции находилось не более трех кроликов;

3) на каждой из четырех боковых сторон клетки находилось ровно по 11 кроликов;

4) в верхнем этаже было бы размещено вдвое больше кроликов, чем в нижнем.

Институт получил на три кролика меньше, чем ожидали. Несмотря на это, всех кроликов разместили в соответствии с приведенными условиями.

Определите, сколько кроликов первоначально предполагалось разместить в клетке и как их должны были разместить.

А как можно разместить всех полученных кроликов?

93. Подготовка к празднику

Геометрический смысл предыдущих четырех задач заключался в осуществлении такого расположения предметов вдоль *четырех* прямых линий (сторон прямоугольника или квадрата), что число предметов вдоль каждой прямой сохранялось одним и тем же при изменении их общего количества.

Такое расположение достигалось за счет того, что все предметы, расположенные по углам, считались как бы принадлежащими каждой из сторон угла подобно тому, как точка пересечения двух прямых принадлежит каждой из них.

Если полагать, что каждый из предметов, размещаемых по сторонам фигуры, занимает некоторую точку на соответствующей стороне, то все предметы, расположенные по углам, надо воображать сосредоточенными в одной точке (в вершине угла).

Откажемся теперь от возможности пусть даже воображаемого скопления предметов в одной геометрической точке.

Будем считать, что каждый отдельный предмет (камушек, лампочка, дерево и т. п.) из числа расположенных на некоторой плоскости занимает отдельную точку этой плоскости, и не будем ограничивать себя требованием размещать эти предметы только по четырем прямым линиям. Если эти условия дополнить еще требованием симметричности решения в каком-либо смысле, то задачи о размещении предметов вдоль прямых линий приобретут дополнительный геометрический интерес. Решение таких задач приводит обычно к построению некоторой геометрической фигуры.

Например, как при изготовлении праздничной иллюминации можно красиво разместить 10 лампочек в 5 рядов по 4 лампочки в каждом ряду?

Ответ на этот вопрос дает пятиконечная звезда, изображенная на рис. 41.

Поупражняйтесь в решении аналогичных задач. Постарайтесь при этом добиться симметрии в требуемом расположении.

Задача 1. Как расположить 12 лампочек в 6 рядов по 4 лампочки в каждом ряду? (Эта задача имеет два решения.)

Задача 2. Рассадите 13 декоративных кустов в 12 рядов по 3 куста в каждом ряду.

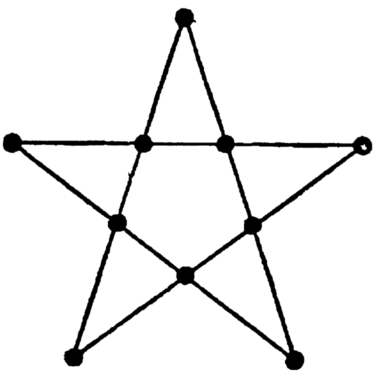


Рис. 41. 5 рядов по 4

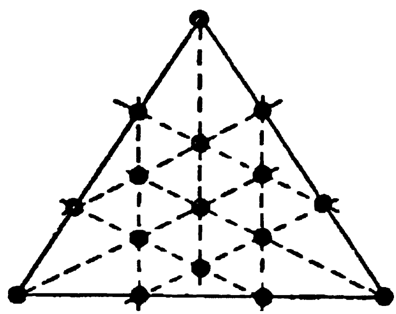


Рис. 42. Как сделать 15 рядов по 4

Задача 3. На треугольной площадке (рис. 42) садовник вырастил 16 роз, расположенных в 12 прямолинейных рядов по 4 розы в каждом ряду. Потом он приготовил клумбу и пересадил туда все 16 роз в 15 рядов по 4 розы в каждом. Как он это сделал?

Задача 4. Разместите 25 деревьев в 12 рядов по 5 деревьев в каждом ряду.

94. Рассадить дубки по-другому

Красиво высажены 27 дубков по схеме, изображенной на рис. 43: в 9 рядов по 6 дубков в каждом ряду. Но лесник, несомненно, забраковал бы такую планировку. Дубу солнце нужно только сверху, а по бокам чтобы зелень была.

Любит он, как говорится, расти в шубе, но без шапки, а тут отскочили 3 дубка куда-то в сторону и торчат одиноко!

Попробуйте рассадить эти 27 дубков по-другому, тоже в 9 рядов и тоже по 6 дубков в каждом, но так, чтобы все деревья расположились в три группы и ни одно из них не отскакивало от своей группы. Сохраните и симметрию в расположении.

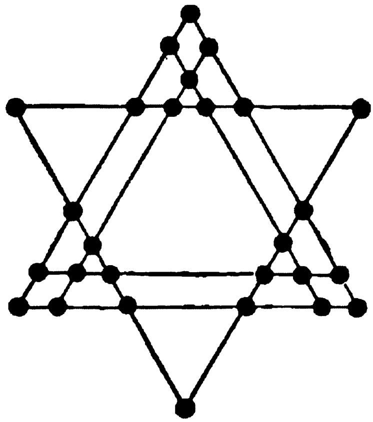


Рис. 43. Найдите другое расположение в 9 рядов по 6

95. Геометрические игры

Игра первая. Расположите на столе 10 шашек (или монет, пуговиц и т. п.) в 2 ряда по 5 штук, как показано на рис. 44.

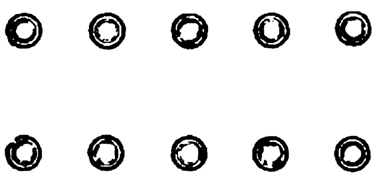


Рис. 44

Нужно переставить какие-либо 3 шашки из одного ряда и 1 шашку из другого (не сдвигая с мест остальные шашки и не накладывая одну шашку на другую) так, чтобы образовалось 5 прямолинейных рядов по 4 шашки в каждом ряду.

Здесь, в отличие от предыдущих задач, симметричное расположение шашек не требуется. На рис. 45 представлено для примера пять различных решений.

Замечание. Решения считаются различными, если они приводят к различным конфигурациям из данных 10 шашек, например как на рис. 45.

Вы, быть может, подумаете, что я уже исчерпал все возможные решения данной задачи. Конечно, нет! Ведь для решения задачи можно выбирать разные комбинации шашек, предназначаемых для перемещения (см. на рис. 45 схемы *а*, *б*, *в*, *д*), и по-разному размещать одну и ту же избранную группу шашек (см. на рис. 45 схемы *а* и *г*). Допустим, вы берете для перекладывания 3 шашки из верхнего ряда и 1 из нижнего. Всевозможные сочетания шашек по 3 (из 5) уже дают 10 различных комбинаций. Убедитесь в этом! А присоединение к любой из этих комбинаций еще по одной какой-либо шашке из нижнего ряда дает каждый раз по 5 групп. Так можно получить $10 \times 5 = 50$ различных группировок по 4 шашки, предназначаемых для перемещения.

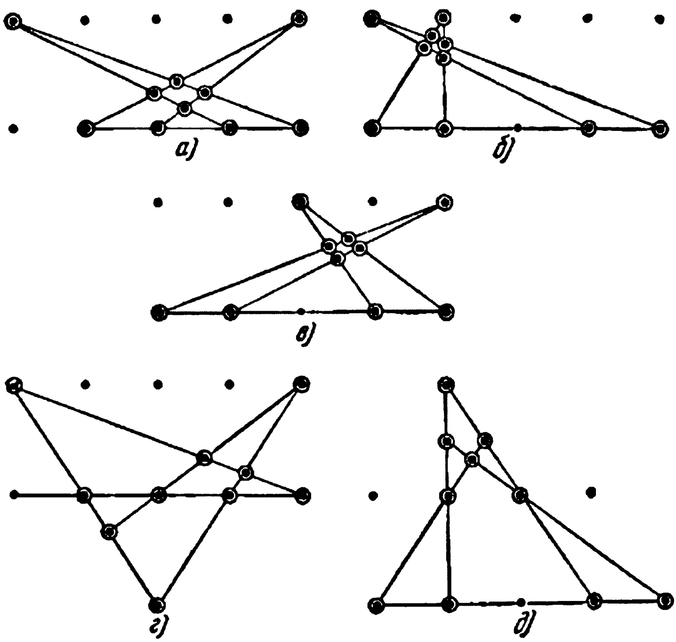


Рис. 45. Пять различных решений

Дополнение к первой игре. Организуйте такую игру-соревнование. Разложите перед каждым участником игры по 10 шашек (можно нарезать из картона) в 2 ряда и пусть каждый (не показывая остальным) у себя переместит 4 шашки (3 из одного ряда и 1 из другого) так, чтобы получилось 5 рядов по 4 шашки в каждом ряду. Затем сравните решения. Те из игроков, у которых будут одинаковые конфигурации шашек, получают по одному очку; конфигурация шашек, отличающаяся от всех остальных, оценивается в 2 очка. Не решившие задачу в отведенное время не получают ни одного очка. Повторив игру несколько раз, подсчитайте сумму очков у каждого участника игры и определите победителей.

Можно провести игру и совсем без шашек. Раздайте каждому участнику по листу бумаги и линейке. Шашки замените точками на бумаге, расположив их первоначально тоже в 2 ряда по 5 точек. Игра будет заключаться в том, чтобы, вычеркнув какие-либо 3 точки из одного ряда и 1 из другого, изобразить вместо них новые 4 точки так, чтобы вместе с остальными (без вычеркнутых, разумеется) они образовали 5 рядов по 4 точки в каждом ряду.

Еще одно дополнение к первой игре. Можно разрешить брать 4 шашки, по 2 из каждого ряда, и накладывать одну шашку на другую. Тогда возможны будут и такие, например, решения, как на рис. 46. В связи с этим дополнительным соглашением количество возможных решений задачи значительно увеличивается.

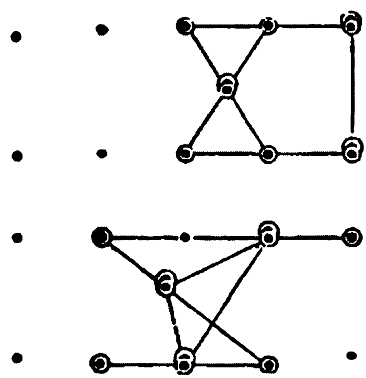


Рис. 46. Два возможных решения

Игра вторая. На листе картона проколите 49 небольших отверстий в виде квадратной решетки. В 10 отверстий вставьте по спичке, как указано на рис. 47. Содержание игры заключается в решении задач вроде такой, например.

Вынуть какие-либо 3 спички и поместить их в другие отверстия картонного листа так, чтобы образовалось 5 рядов по 4 спички в каждом ряду.

Решите сначала эту задачу для случая, представленного на рис. 47, а потом можете ее разнообразить, изменяя первоначальное расположение спичек и число рядов, которые вновь должны быть образованы.

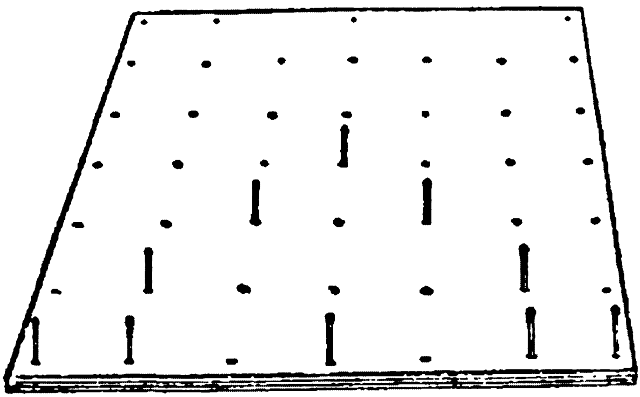


Рис. 47. В 10 отверстий — по спичке

Замечание. В качестве «поля» для решения предложенной задачи пригоден пластилин.

96. Чет и нечет (головоломка)

Положите 8 пронумерованных шашек в центральный круг (рис. 48) столбиком по порядку номеров, с цифрой 8 вниз и цифрой 1 наверх. Задача состоит в том, чтобы в наименьшее число ходов переместить шашки с цифрами 1, 3, 5 и 7 из центрального столбика в кружок с пометкой «нечет», а шашки с цифрами 2, 4, 6 и 8 в кружок с пометкой «чет». Ходом считается всякое перемещение шашки с одного места на другое. За один ход можно перемещать с кружка на кружок только одну шашку (всякий раз верхнюю), но при этом нельзя класть шашку, пронумерованную бо́льшим числом, на шашку, имеющую меньший номер, и нельзя на шашку с четным номером класть шашку с нечетным номером или на шашку с нечетным номером класть шашку с четным номером.

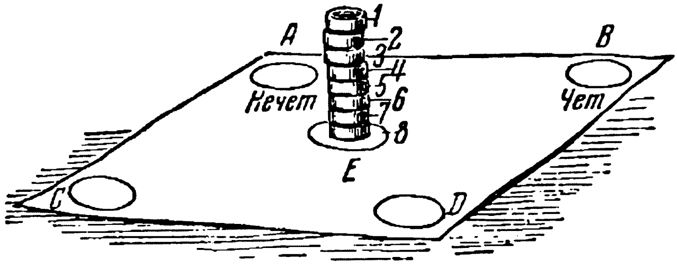


Рис. 48. Соблюдая правила, переместите шашки на кружки «чет» и «нечет»

Можно, скажем, шашку с цифрой 1 положить на шашку с цифрой 3 или шашку с цифрой 3 на шашку с цифрой 7, шашку с цифрой 2 на шашку с цифрой 6, но не наоборот, и нельзя положить шашку с цифрой 1 на шашку с цифрой 2 или шашку с цифрой 4 на шашку с цифрой 7, так как тогда оказались бы вместе «чет» и «нечет».

Сколько вам потребовалось ходов для решения задачи?

97. Упорядочить расположение шашек

Расположите 25 нумерованных шашек в 25 квадратных клетках, как указано на рис. 49. Обменивая шашки местами, приведите их в порядок, то есть уложите номера 1, 2, 3, 4, 5 слева направо в первый ряд, номера 6, 7, 8, 9, 10 слева направо во второй ряд и т. д. до конца. Можете, например, поменять местами номера 7 и 1, 24 и 2 и т. д.

Определите наименьшее число необходимых обменов.

7	24	10	19	3
12	20	8	22	23
2	15	25	18	13
11	21	5	9	16
17	4	14	1	6

Рис. 49

Чтобы избежать бесполезных перемещений, следует разработать какую-нибудь систему. Подумайте об этом.

98. Подарок-головоломка

Есть такая игрушка-коробочка: откроешь ее, а внутри еще коробочка; ее откроешь, внутри опять коробочка.

Сделайте такую игрушку из 4 коробочек. В самую маленькую внутреннюю коробочку положите 4 конфеты, добавьте по 4 конфеты в каждую из 2 следующих коробочек и 9 конфет — в самую большую.

Таким образом, в четырех коробочках будет размещена 21 конфета (рис. 50).

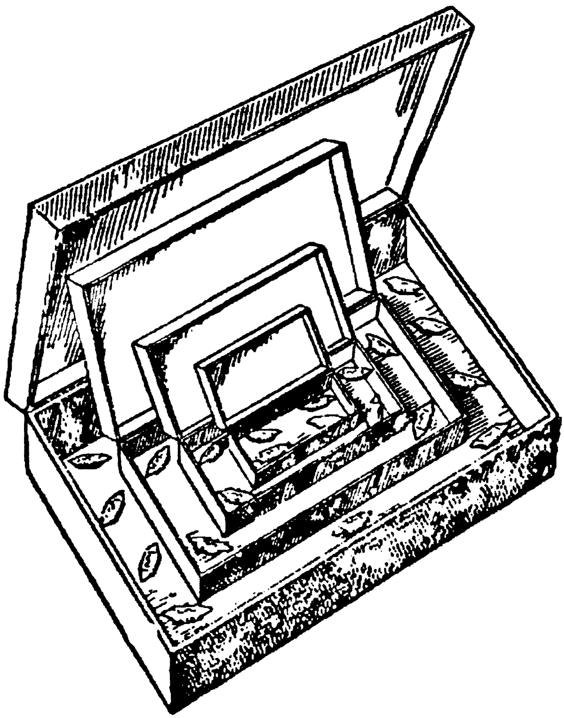


Рис. 50. Подарок-головоломка

Подарите эту коробку с конфетами другу в день рождения с условием не есть конфеты до тех пор, пока юбиляр не перераспределит 21 конфету так, чтобы в каждой коробочке лежало по *четному* числу *пар* конфет и еще одна.

Разумеется, прежде чем делать такой подарок, нужно самому раскусить эту головоломку. Имейте в виду, что никакие правила арифметики здесь не помогут, следует лишь проявить смекалку и небольшую долю остроумия.

99. Ходом коня

Для решения этой забавной задачи не требуется умения играть в шахматы. Достаточно лишь знать, как перемещается фигура коня. На шахматной доске расставлены черные пешки (см. рис. 51). Поставьте белого коня на любую желательную вам свободную клетку шахматной доски с таким расчетом, чтобы этим конем можно было снять с доски все черные пешки, делая при этом наименьшее возможное число ходов.

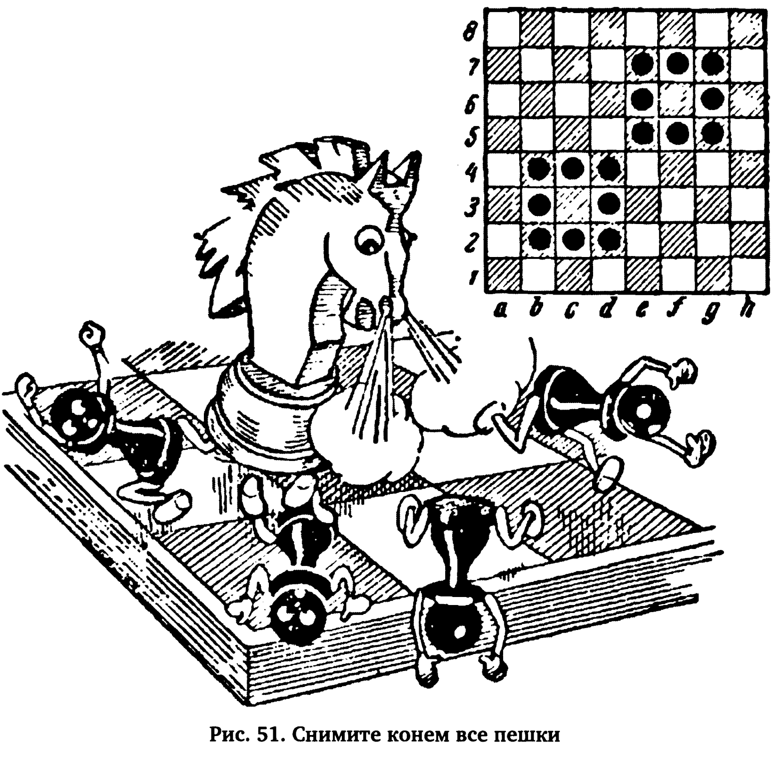


Рис. 51. Снимите конем все пешки

100. Перемещение шашек (две головоломки)

Первая головоломка. Пронумеруйте 9 шашек числами от 1 до 9. Расставьте шашки на специальном поле, изображенном на рис. 52, так, чтобы номера клеток и шашек совпадали; только шашку с цифрой 1 поместите в клетку № 10, а клетку № 1 оставьте свободной.

Не вынимая шашек из клеток, а только перемещая их, переведите шашку с цифрой 1 в клетку № 1. Можно временно ставить по одной шашке в клетки *А*, *Б* и *В*. Перепрыгивать шашкой через другую нельзя. Когда шашка с цифрой 1 перейдет на свое место — в клетку № 1, то и все остальные шашки должны оказаться на прежних местах, то есть так, чтобы номера шашек и клеток совпадали.

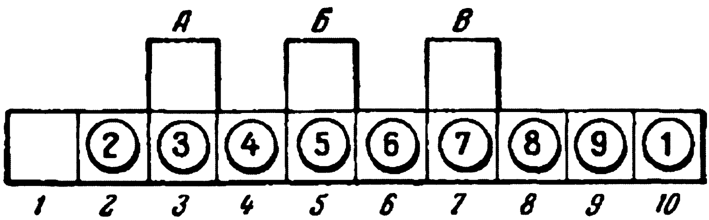


Рис. 52

Вторая головоломка. Для второй задачи возьмите 8 черных и 8 белых шашек и расставьте их так, как указано на рис. 53. Требуется, не снимая шашек с поля, в 46 ходов перегнать все черные шашки на места белых, а белые — на места черных.

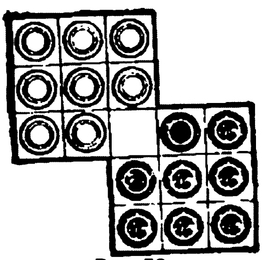


Рис. 53

Шашки могут передвигаться вперед и назад, вправо и влево, но не наискосок. В тех же направлениях разрешается перепрыгивать через одну шашку на свободную клетку. Две шашки в одну клетку помещать нельзя. Очередность в перемещении белых и черных шашек соблюдать не требуется. Если нужно, то можно перемещать несколько раз подряд шашки одного цвета.

Найдите решение.

101. Оригинальная группировка целых чисел от 1 до 15

Посмотрите, как красиво можно расположить все целые числа от 1 до 15 в пять групп по три числа в каждой группе:

$$\left.\begin{matrix}1\\8\\15\end{matrix}\right\} d=7;\quad \left.\begin{matrix}4\\9\\14\end{matrix}\right\} d=5;\quad \left.\begin{matrix}2\\6\\10\end{matrix}\right\} d=4;\quad \left.\begin{matrix}3\\5\\7\end{matrix}\right\} d=2;\quad \left.\begin{matrix}11\\12\\13\end{matrix}\right\} d=2.$$

Числа распределены по группам так, что в каждой группе разность d одна и та же — как между вторым и первым, так и между третьим и вторым числами. Например, $8 - 1 = 7$ и $15 - 8 = 7$ или $9 - 4 = 5$ и $14 - 9 = 5$ (каждая группа чисел с постоянной разностью между соседними числами составляет последовательность, которую называют *арифметической прогрессией*). Это забавное распределение пятнадцати порядковых целых чисел на пять групп с указанными разностями будет не единственно возможным. Оставив первую группу чисел (1, 8, 15) без изменения, остальные двенадцать чисел (2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 12, 13, 14) можно сгруппировать в *новые* тройки чисел, но с *прежними* разностями: $d = 5$; $d = 4$; $d = 2$ и $d = 1$.

Найдите эту новую группировку данных чисел.

Желающие могут попытаться расположить эти же числа от 1 до 15 в группы арифметических прогрессий с другими значениями d.

102. Восемь звездочек

В одной из белых клеток на рис. 54 я поставил звездочку. Разместите в белых клетках еще 7 звездочек так, чтобы никакие 2 звездочки (из 8) не находились на одной горизонтали, вертикали или какой-либо диагонали.

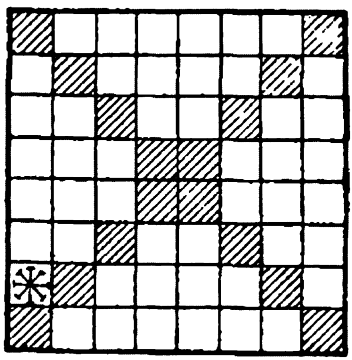


Рис. 54

Решать задачу, конечно, нужно путем проб, поэтому дополнительный интерес задачи еще и в том, чтобы в процесс необходимых испытаний внести некоторую систему.

103. Две задачи на расстановку букв

Первая задача. В квадрате, разделенном на шестнадцать равных квадратов, расставьте четыре буквы так, чтобы в каждом горизонтальном ряду, в каждом вертикальном ряду и в каждой из двух диагоналей большого квадрата встречалась только одна буква. Как велико число решений этой задачи в том случае, когда расставляемые буквы одинаковы, и в том случае, когда они различны?

Вторая задача. В квадрате, разделенном на шестнадцать равных квадратов, расставьте по четыре раза каждую из четырех букв a, b, c и d таким образом, чтобы в каждом горизонтальном ряду, в каждом вертикальном ряду и в каждой из двух диагоналей большого квадрата не было одинаковых букв. Как велико число решений этой задачи?

104. Раскладка разноцветных квадратов

Приготовьте 16 квадратов одного размера, но четырех различных окрасок, положим, белой, черной, красной и зеленой — по 4 квадрата каждой окраски. У вас образуется 4 комплекта разноцветных квадратов. На каждом квадрате первого комплекта напишите цифру 1, на каждом квадрате второго комплекта — 2, на квадратах третьего комплекта — 3 и на квадратах четвертого — 4.

Требуется расположить эти 16 разноцветных квадратов в виде квадрата, причем так, чтобы в каждом горизонтальном ряду, в каждом вертикальном ряду и в каждой из двух диагоналей находились в каком-либо произвольном порядке квадраты с цифрами 1, 2, 3 и 4 и притом непременно разных окрасок.

Задача допускает очень много решений. Подумайте о системе получения требуемых расположений.

105. Последняя фишка[1]

Вырежьте из картона 32 одинаковые фишки (произвольной формы) и все их расставьте по одной в каждый кружок (рис. 55). Так как кружков 33, то один из них (безразлично какой) останется свободным.

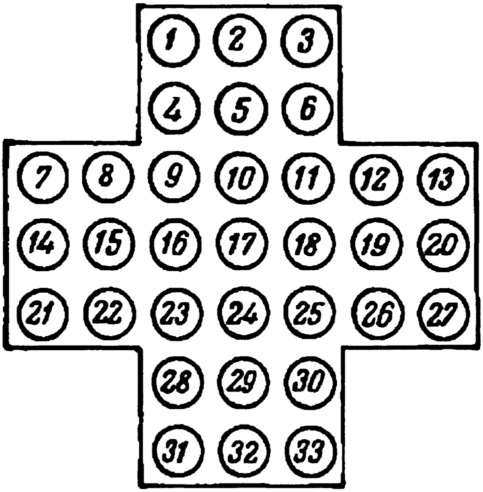


Рис. 55

Задача состоит в том, чтобы снять все фишки, кроме одной. Эта последняя фишка должна остаться в том самом кружке, который первоначально оставался свободным. Снимать фишки можно ходом назад, вперед и в стороны, перескакивая любой фишкой через другую на свободный кружок. Каждым ходом снимается одна фишка, следовательно, задачу нужно решить в 31 ход.

106. Кольцо из дисков

Возьмите 6 одинаковых дисков и уложите их плотно, как показано на рис. 56, *а*. Требуется в 4 хода расположить их в виде кольца (рис. 56, *б*). «Ход» состоит в следующем: прижимая

---

[1] Старинная игра-головоломка — «солитер», или «пустынник», известна еще с начала XVIII века.

какие-либо 5 дисков к столу, нужно переместить шестой диск в новое положение, не отрывая его от остальных, причем в новом положении он должен соприкасаться не менее чем с двумя дисками. Решить эту головоломку именно в 4 хода не так просто, как может показаться на первый взгляд.

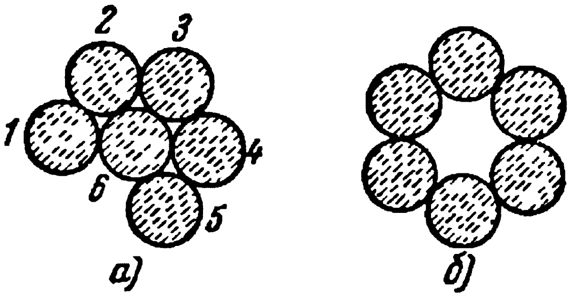


Рис. 56. В 4 хода перейдите из положения а) в положение б)

В качестве дисков возьмите, например, 6 одинаковых монет или вырежьте из картона 6 одинаковых кружков.

Дополнительное задание. Решение предложенной головоломки состоит в последовательном перемещении дисков. Изменяя порядок перемещений, можно получить различные решения задачи. Требуется найти все различные решения головоломки. Чтобы не запутаться, диски пронумеруйте и записывайте каждый ход по такой системе:

1–2, 3, что значит: диск №1 переместить до соприкосновения с дисками №2 и №3;

2–6, 5, что значит: диск №2 переместить до соприкосновения с дисками №6 и №5 и т.д.

Вот примерное решение головоломки:

1–2, 3; 2–6, 5; 6–1, 3; 1–6, 2.

Найдите еще 23 решения.

107. Фигуристы на катке

На московском катке репетируется спектакль, подготовленный силами учеников балетной школы на льду. Художник, оформляющий постановку спектакля, разрисовал одну половину ледяного поля под узорчатый ковер с 64 цветочками (рис. 57, *а*), а другую — под паркетный пол в 64 бело-черные клетки (как шахматная доска, рис. 57, *б*).

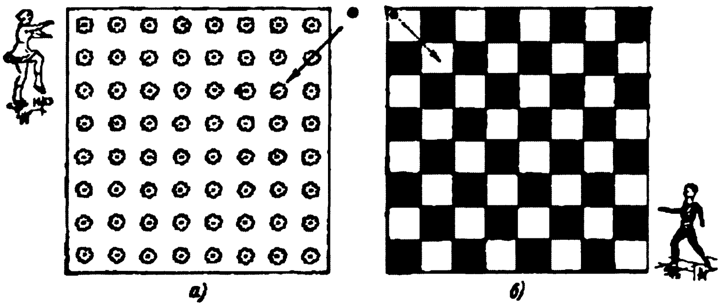


Рис. 57. Найдите маршруты фигуристов

Сейчас перерыв в репетиции. Но девочка и мальчик — два неутомимых фигуриста — продолжают вырисовывать кривые на зеркально-гладком ледяном поле.

Девочку заинтересовали цветочки ледяного ковра, и ей захотелось одним движением (конечно, с поворотами в некоторых точках поля) проехать через *все* 64 цветка. Двигаться она решила только по прямым линиям, причем так, чтобы последний прямолинейный путь привел ее в то же место, с которого она начала движение (отмечено на рисунке черной точкой).

Ей это вполне удалось, причем весь ее путь состоял только из 14 прямолинейных отрезков. (Через некоторые из цветков девочка проехала несколько раз.)

Нарисуйте на листе бумаги схему маршрута девочки.

Мальчик тренировался на втором участке ледяного поля. Узнав о «геометрических» достижениях своей подруги по фигурному катанию, он не хотел остаться в долгу и поставил перед собой еще более сложную задачу: двигаясь только по белым клеткам и пересекая вершины клеток не более чем по одному разу, переместиться из левого дальнего угла поля в противоположный по диагонали правый угол, побывав в каждой белой клетке.

Нарисуйте схему движения фигуриста, если известно, что его путь состоит из 17 прямолинейных отрезков.

108. Задача-шутка

Пятиклассник Коля Синичкин усердно старается перевести шахматного коня из левого нижнего угла шахматной доски (с поля *a*1) в правый верхний угол (на поле *h*8) так, чтобы конь побывал на каждой клетке доски по одному разу (рис. 58). Пока ему это не удается. Но не пытается ли он решить неразрешимую задачу?

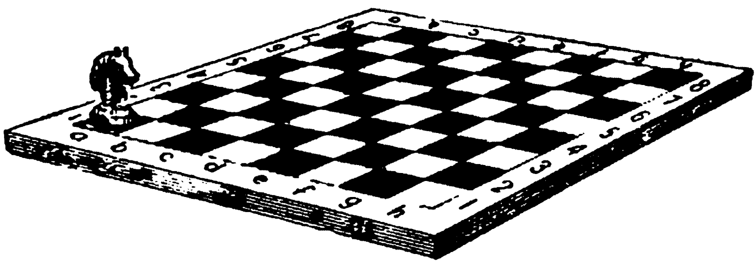


Рис. 58. Можно ли перевести коня с *a*1 на *h*8?

Разберитесь в этом теоретически и объясните Коле Синичкину, в чем тут дело.

109. Сто сорок пять дверей (головоломка)

Вообразите средневековый замок, чей подвал превращен в тюрьму. Подвал этот — настоящий лабиринт. Вы найдете его план на рис. 59.

В тюрьму брошен узник. В устройстве этого подвала есть свой секрет. Из 145 дверей только 9 заперты (они обозначены на рис. 59 жирными полосками), а все остальные открыты настежь. Кажется, так легко подойти к двери, ведущей наружу, и попытаться ее открыть. Но не тут-то было! Открыть запертую дверь нельзя ничем, но она сама распахнется, если будет точно *девятой* по счету, то есть если перед этим будет пройдено 8 открытых дверей. При этом должны быть открыты и пройдены все запертые двери подземелья; каждая из них также открывается сама, если перед этим пройдено ровно 8 открытых дверей. Исправить ошибку и пройти две-три лишние двери по соседству, чтобы довести число пройденных дверей до восьми, тоже не удастся: как только какая-нибудь камера пройдена, все прежде открытые в ней двери наглухо закрываются и запираются — второй раз через камеру не пройдешь. Так было сделано нарочно. Узник знал об этом секрете подземелья, а на стене своей камеры (отмеченной на плане звездочкой) нашел нацарапанный гвоздем точный план лабиринта. Долго он ломал голову над тем, как наметить правильный маршрут, чтобы каждая запертая дверь действительно оказалась девятой. Наконец он решил эту задачу и вышел на свободу.

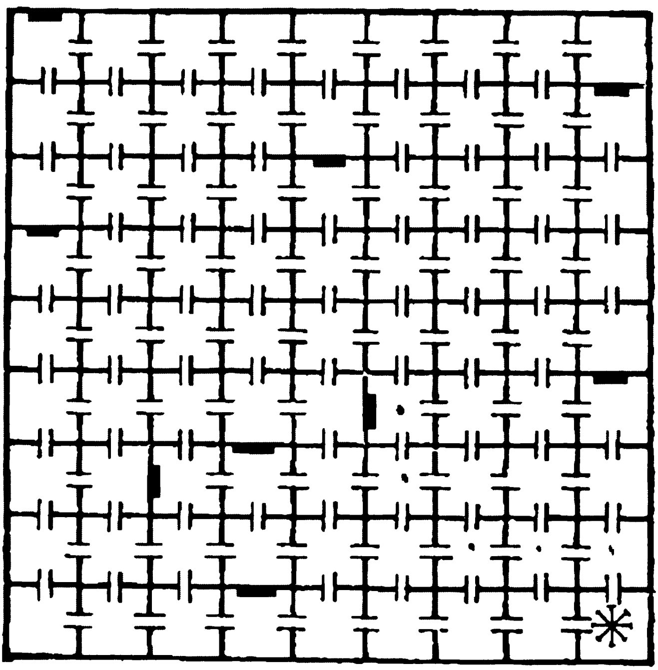


Рис. 59. План лабиринта

Какое решение нашел узник?

110. Как узник вышел на свободу?

Желающие могут подумать еще над таким вариантом предыдущей задачи.

Вообразите, что каземат, в котором томится узник, состоит из 49 камер.

В семи камерах, обозначенных на плане подземелья (рис. 60) буквами *А*, *Б*, *В*, *Г*, *Д*, *Е* и *Ж*, есть по одной двери, открывающейся только ключом, причем ключ от двери камеры *А* находится в камере *а*, ключ от двери камеры *Б* находится в камере *б*, ключи от дверей камер *В*, *Г*, *Д*, *Е* и *Ж*, находятся соответственно в камерах *в*, *г*, *д*, *е* и *ж*.

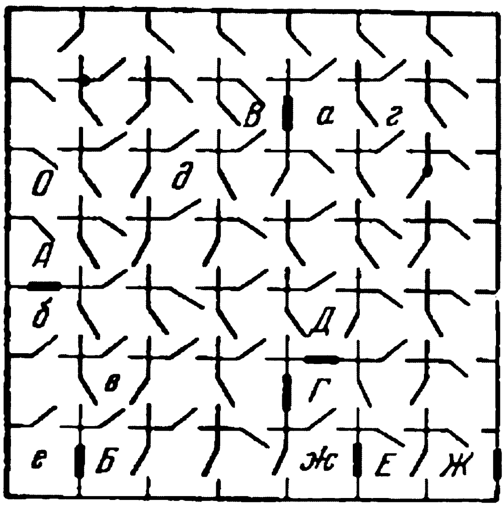
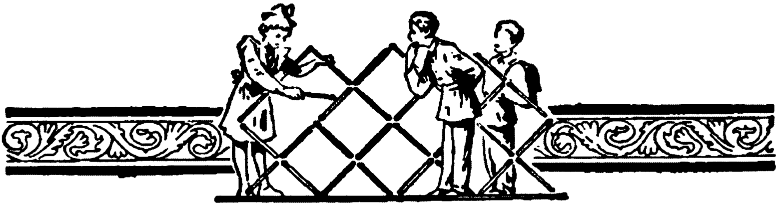


Рис. 60. Подземелье состоит из 49 камер

Остальные двери открываются простым нажимом на ручку, но ручка имеется только с одной стороны каждой двери, и дверь, после того как она пройдена, автоматически захлопывается. На другой стороне двери ручки нет.

На плане подземелья показано, в какую сторону можно пройти через каждую дверь, открывающуюся без ключа, но в каком порядке следует открывать запертые двери, неизвестно. Через одну и ту же дверь разрешается проходить любое число раз — разумеется, соблюдая условия, при которых она открывается.

Узник находится в камере *O*. Укажите ему путь, ведущий к выходу на свободу.



Глава третья

ГЕОМЕТРИЯ НА СПИЧКАХ

Коробок спичек — отличное пособие для геометрических развлечений, требующих находчивости и развивающих сообразительность.

Из спичек можно составить всевозможные прямолинейные фигуры; превращать одну фигуру в другую путем перекладывания спичек; даже теоремы можно доказывать на спичках. Рассмотрим для примера такую задачу.

Сколько одинаковых квадратов можно составить из 24 спичек, не ломая их и используя при этом все спички?

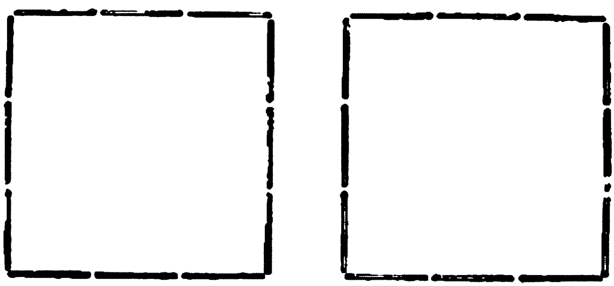


Рис. 61. Из 24 спичек 2 квадрата

Если на каждую сторону квадрата употребить по 6 спичек (больше нельзя), то получится *один* квадрат.

При стороне квадрата в 5 или в 4 спички одинаковых квадратов из всех 24 спичек не получится. При стороне в 3 спички можно выложить *два* квадрата (рис. 61).

При стороне квадрата в 2 спички — *три* квадрата (рис. 62).

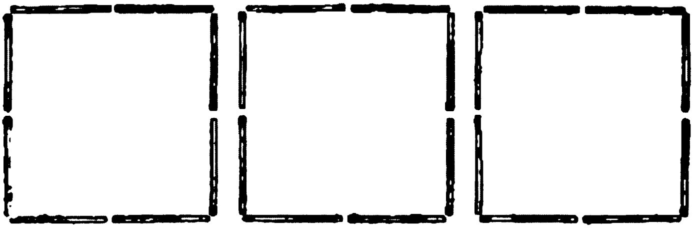


Рис. 62. Из 24 спичек 3 квадрата

Обратите внимание, что из квадратов со сторонами в 3 и 2 спички можно образовать еще дополнительные квадраты *других* размеров, как показано на рис. 63 и 64: один дополнительный квадрат (1) из квадратов со стороной в 3 спички (рис. 63), четыре дополнительных квадрата (1–4) из квадратов со стороной в две спички (рис. 64).

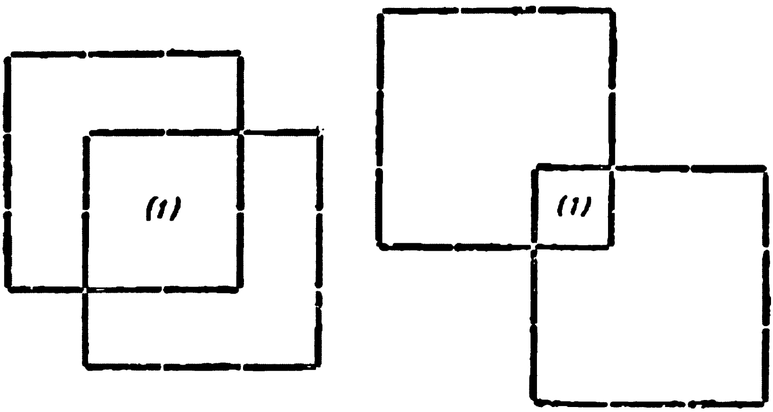


Рис. 63. Можно образовать дополнительный квадрат

Если из каждых четырех спичек составлять один квадрат, то из 24 спичек можно образовать 6 одинаковых квадратов (рис. 65, *а*).

Если же некоторые спички дважды считать сторонами квадрата, то из 24 спичек можно образовать 7 одинаковых квадратов (рис. 65, *б*), или 8 (рис. 66, *а*, *б*) или даже 9 (рис. 66, *в*).

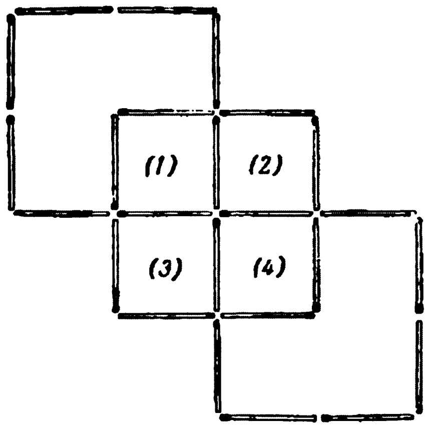
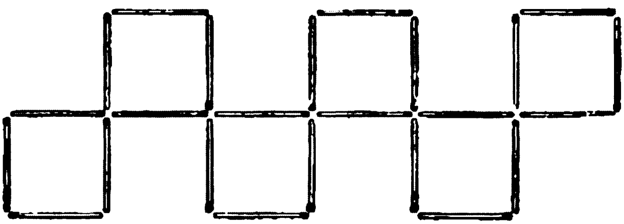
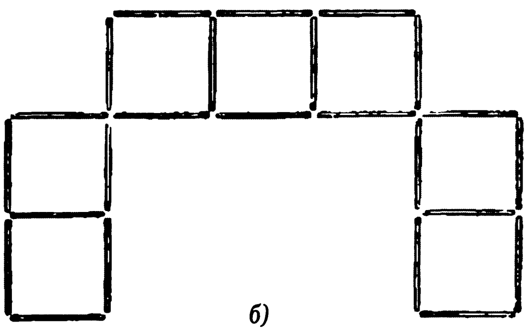


Рис. 64. Четыре дополнительных квадрата



а)



б)

Рис. 65. Из 24 спичек 6 и 7 квадратов

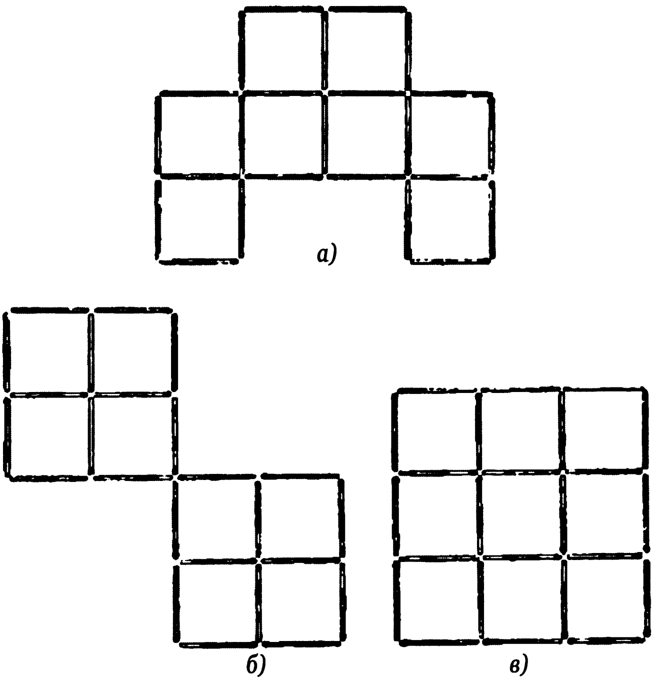


Рис. 66. Из 24 спичек 8 и 9 квадратов

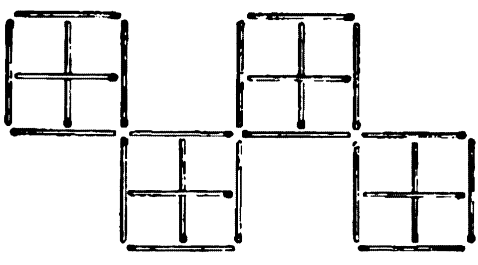


Рис. 67. Из 24 спичек 20 квадратов

При составлении трех последних фигур образовались еще дополнительные квадраты других размеров: один на рис. 66, *а*, два на рис 66, *б* и пять на рис. 66, *в* (найдите их).

При стороне квадрата в $^1/_2$ спички (допускаем наложение одной спички поперек другой) можно получить 16 квадратов одинакового размера и 4 дополнительных квадрата. Всего 20 квадратов (рис. 67).

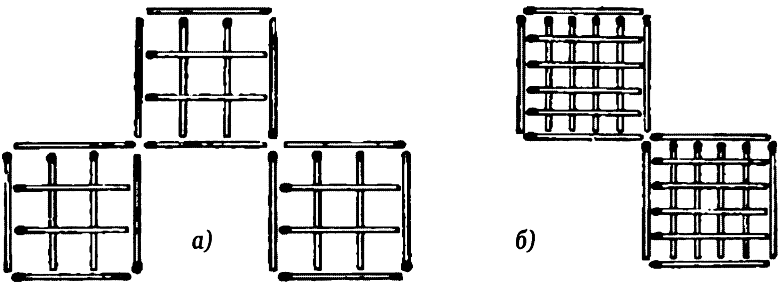


Рис. 68. Из 24 спичек 42 и 50 квадратов

Из 24 спичек при стороне квадрата в $^1/_3$ спички может быть образовано 27 одинаковых квадратов, а с дополнительными квадратами других размеров — 42 (рис. 68, *а*), и, наконец, при стороне квадрата в $^1/_5$ спички — 50 квадратов одинакового размера (рис. 68, *б*). Если же считать дополнительные квадраты (их 60), то всего получится 110 квадратов.

* * *

Сообразите, как решить следующие задачи-головоломки[1].

111. Пять головоломок

Из 12 спичек выложено 4 одинаковых квадрата (рис. 69), при этом образовался еще один дополнительный квадрат (большой). Требуется:

[1] Под одним номером объединены те задачи, решение которых следует начинать с одного и того же первоначального расположения спичек. Каждая задача решается независимо от предыдущей.

а) Отобрать 2 спички; остальные не трогать; должно получиться 2 неравных квадрата.

б) Переложить 3 спички так, чтобы образовалось три равных квадрата.

в) Переложив 4 спички, образовать 3 равных квадрата.

г) Переложив 2 спички, образовать 7 квадратов (в этой и следующей задачах допускается наложение одной спички поперек другой).

д) Переложив 4 спички, получить 10 квадратов.

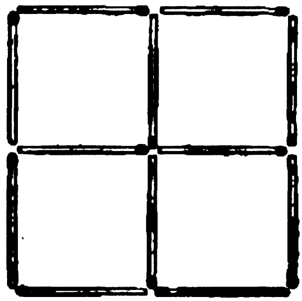


Рис. 69

112. Еще восемь головоломок

Из 24 спичек выложена фигура квадрата с девятью квадратными ячейками (рис. 70). Требуется:

а) Переложив 12 спичек, образовать 2 равных квадрата.

б) Отобрать 4 спички так, чтобы оставшиеся образовали 1 большой и 4 маленьких квадрата.

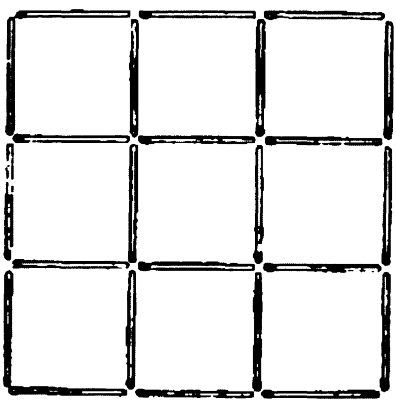


Рис. 70

в) Образовать 5 равных квадратов, отобрав либо 4, либо 6, либо 8 спичек.

г) Вынуть 8 спичек так, чтобы оставшиеся образовали 4 равных квадрата (два решения).

д) Вынуть 6 спичек — образовать 3 квадрата.

е) Вынуть 8 спичек — останется 2 квадрата (два решения).

ж) Отобрать другие 8 спичек — останется 3 квадрата.

з) Отобрать 6 спичек — получится 2 квадрата и 2 равных неправильных шестиугольника.

113. Из девяти спичек

Из 9 спичек составить 6 квадратов (допускается наложение одной спички поперек другой).

114. Спираль

Из 35 спичек выложена фигура, напоминающая спираль (рис. 71). Переложите 4 спички так, чтобы образовалось 3 квадрата.

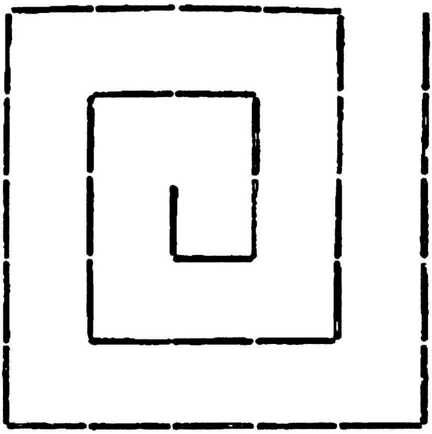


Рис. 71. Спираль

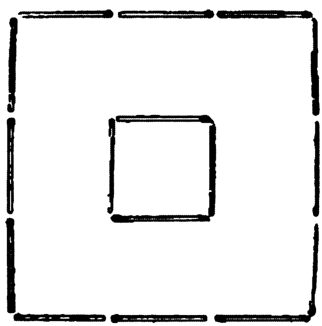


Рис. 72. План крепости

115. Шутка

Из 16 спичек выложен план крепости, окруженной глубоким рвом (рис. 72). Как при помощи 2 досок (спичек), длина которых как раз равняется ширине рва, пробраться в крепость?

116. Снять две спички

Фигура, изображенная на рис. 73, составлена из восьми спичек, наложенных друг на друга. Снять 2 спички так, чтобы осталось 3 квадрата.

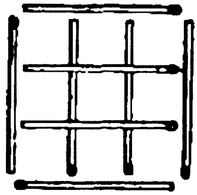


Рис. 73

117. Фасад «дома»

Фасад «дома» выложен из 11 спичек (рис. 74). Перекладывая 2 спички, можно получить 11 квадратов, а перекладывая 4 спички, можно тот же «дом» превратить в фигуру, содержащую 15 квадратов. Сделайте это!

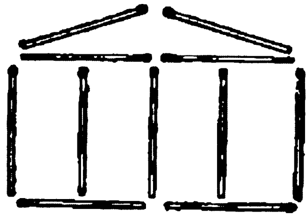


Рис. 74. «Дом»

118. Шутка

Положите 6 спичек так, чтобы образовался квадрат.

119. Треугольники

Для составления одного равностороннего треугольника необходимо использовать 3 спички (если их не ломать), а для составления *шести* одинаковых равносторонних треугольников достаточно 12 спичек.

Сделайте это!

После этого переложите 4 спички с одного места на другое так, чтобы получилось 3 равносторонних треугольника, из которых только 2 были бы равны между собой.

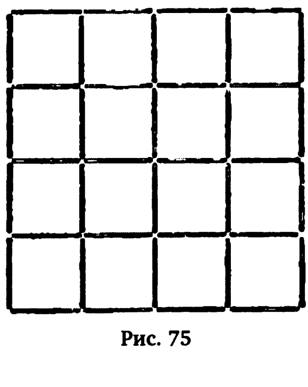


Рис. 75

120. Сколько спичек нужно убрать?

Выложены 16 одинаковых квадратов (рис. 75). Если подсчитать все квадраты, какие есть в этой фигуре, то всего их наберется…

Впрочем, сосчитайте сами! Сколько спичек (самое меньшее) нужно убрать, чтобы оставшаяся фигура не содержала ни одного ни большого, ни маленького квадрата?

121. Шутка

Каждая спичка имеет в длину 4,5 см. Как из 13 спичек сложить метр?

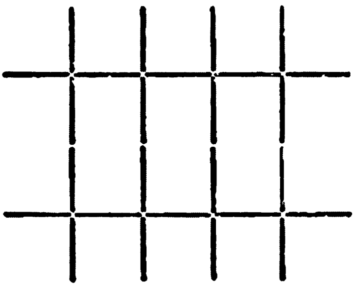


Рис. 76. Изгородь

122. Изгородь

В изгороди, изображенной на рис. 76, нужно переложить 14 спичек так, чтобы получилось 3 квадрата.

123. Шутка

При помощи 2 спичек, не ломая и не разрезая их, образуйте квадрат.

124. «Стрела»

На рис. 77 из 16 спичек построена стрела.

а) Переложите 8 спичек так, чтобы получилось 8 равных треугольников.

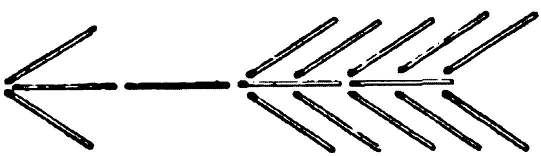


Рис. 77. «Стрела»

б) Переложите 7 спичек так, чтобы получилось 5 равных четырехугольников.

125. Квадраты и ромбы

Из 10 спичек выложите 3 квадрата. Затем отнимите 1 спичку и сделайте из оставшихся спичек 1 квадрат и 2 ромба.

126. В одной фигуре разные многоугольники

8 спичек уложите так, чтобы образовался 1 восьмиугольник, 2 квадрата и 8 треугольников — все в одной фигуре.

127. Планировка сада

16 спичек, выложенных в форме квадрата, представляют изгородь сада (рис. 78). Часть площади этого сада занята домом, изображенным в виде квадрата из 4 спичек. Остальную часть сада требуется разделить при помощи 10 спичек на 5 участков, одинаковых по форме и по площади.

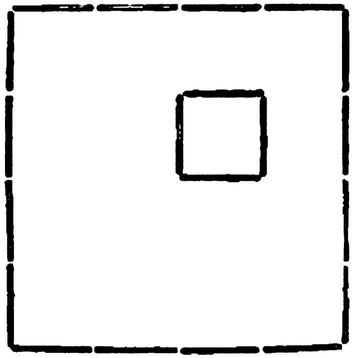


Рис. 78. План сада и дома

128. На равновеликие части

а) Разделите 11 спичками квадрат, составленный из 16 спичек (рис. 79), на 4 равновеликие (имеющие равные площади) части так, чтобы каждая из частей соприкасалась с остальными тремя.

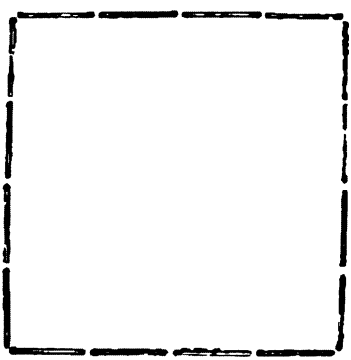


Рис. 79

б) Сад, очертание которого изображено 20 спичками и в середине которого находится колодец квадратной формы (рис. 80), требуется:

1) разделить 18 спичками на 6 равновеликих и одинаковых по форме частей;

2) разделить 20 спичками на 8 равновеликих и одинаковых по форме частей.

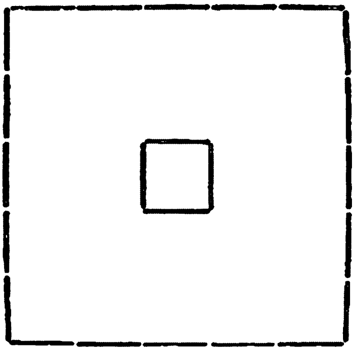


Рис. 80. План сада с колодцем.

129. Паркет

Сколько потребуется спичек, чтобы выложить равными квадратами один квадратный метр? Средняя длина спички — 5 см.

130. Отношение площадей сохраняется

Из 20 спичек составлены 2 прямоугольника: один из 6 спичек, а другой из 14 (рис. 81).

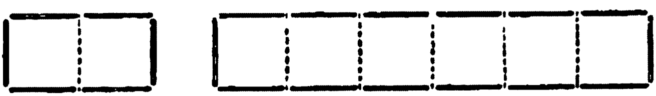


Рис. 81. Изменить фигуры, но сохранить отношение площадей

Пунктирными линиями первый прямоугольник разбит на 2 квадрата, а второй — на 6. Следовательно, площадь второго прямоугольника в 3 раза больше площади первого.

Разделите теперь эти же 20 спичек на другие две группы: 7 и 13 спичек. Из каждой группы спичек сложите по одной фигуре (они могут иметь неодинаковую форму) так, чтобы площадь второй фигуры была в 3 раза больше площади первой.

131. Найти очертание фигуры

Дано 12 спичек. Примем каждую из них за единицу длины. Требуется выложить из 12 спичек такую фигуру, которая охватила бы площадь в 3 квадратные единицы.

Это трудная задача, если исключить простейший случай фигуры, составленной из 3 квадратов, сцепленных вершинами.

132. Найти доказательство

Расположите 2 спички рядом так, чтобы они составили одну прямую линию, и *докажите* при помощи рассуждений правильность своего построения.

Для доказательства требуется выполнить дополнительное построение на спичках, для чего разрешается пользоваться любым количеством спичек.

133. Построить и доказать

Из спичек постройте правильный шестиугольник. Докажите правильность построения.

Глава четвертая

СЕМЬ РАЗ ПРИМЕРЬ, ОДИН РАЗ ОТРЕЖЬ

134. На равные части

Задача 1. Перерисуйте фигуру, изображенную на рис. 82, на лист бумаги и разрежьте ее на 4 равных четырехугольника (фигуры называются равными, если при наложении они совпадают всеми своими частями).

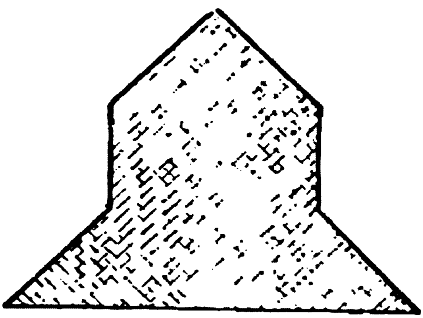


Рис. 82. Как разрезать на равные четырехугольники?

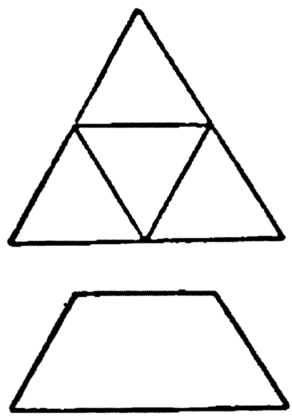


Рис. 83. Как трапецию разрезать на 4 равные части?

Задача 2. Как разрезать равносторонний треугольник на 4 равные части, видно из рис. 83. Удалите верхний треугольник; оставшиеся 3 треугольника образуют фигуру, называемую в геометрии трапецией. Попробуйте и ее разрезать на 4 равные части.

Задача 3. Пластинку, изображенную на рис. 84, разрежьте на 6 равных пластинок.

Задача 4. Если у многоугольника все внутренние углы равны между собой и все его стороны также равны, то он называется *правильным многоугольником*.

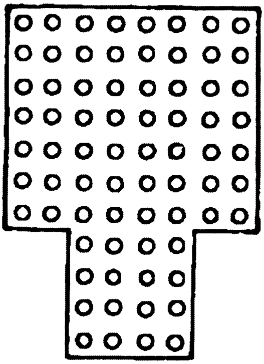


Рис. 84. Разрежьте на 6 одинаковых пластинок

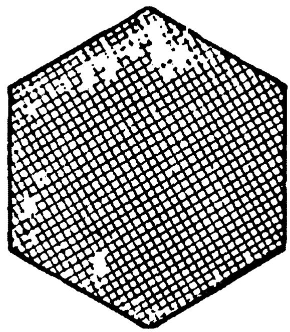


Рис. 85. Как разрезать на 12 равных четырехугольников?

Разрежьте правильный шестиугольник, изображенный на рис. 85, на 12 равных четырехугольников. Будут ли эти четырехугольники правильными, то есть будут ли они квадратами?

Задача 5. Не всякую трапецию можно разрезать на 3–4 равные между собой маленькие трапеции. Не правда ли? Но трапецию, составленную из 3 равных равнобедренных прямоугольных треугольников (рис. 86), похожую на молоток без ручки в продольном разрезе, вы легко разрежете на 4 совершенно одинаковые прямоугольные трапеции.

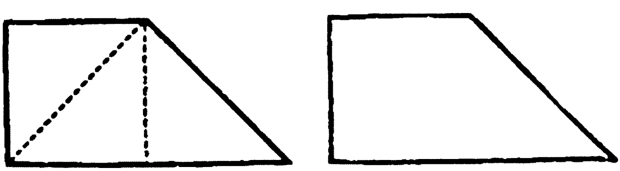


Рис. 86

135. Семь розочек на торте

К чаю был куплен торт (рис. 87). По трем прямым линиям его разрезали на 7 частей. На каждой части при этом оказалось по одной розочке.

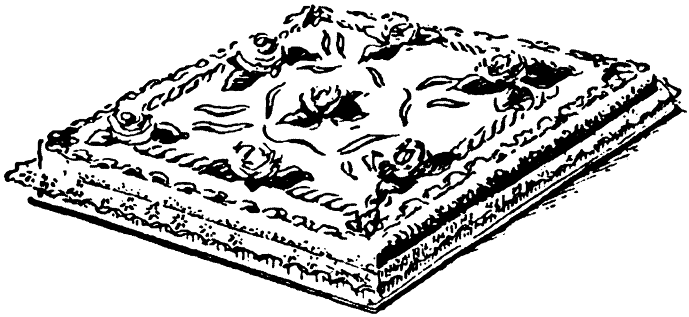


Рис. 87. Три разреза — и каждому по розочке

Как разрезали торт?

136. Фигуры, потерявшие свое очертание

			3		1	1	
			3	4			
				2			
	1		4	2			
	1						
		3	3				
					4	2	2
					4		

Рис. 88. Квадрат был подготовлен для разрезания

Квадрат, в клетках которого вы видите несколько цифр (рис. 88), был подготовлен для разрезания на 4 равные фигуры. Фигуры эти располагались симметрично относительно центра квадрата. Более того, чтобы полностью совместить одну из равных фигур с другой, достаточно было бы любую из них повернуть ровно на 90° вокруг центра квадрата, как вокруг оси. Но беда в том, что кто-то стер намеченные линии разреза, а цифры сохранились. Я помню, что они были размещены так: каждая цифра по одному разу в каждой фигуре.

Я думаю, для вас этого достаточно, чтобы вернуть фигурам потерянное очертание, если известно еще, что линии разреза проходили только вдоль сторон клеточек квадрата.

137. Светомаскировка

Во время Второй мировой войны в городах, близких к фронту, приходилось делать светомаскировку. Как-то в одной из квартир, когда пришла пора затемнять окна, не нашли шторы для квадратного окна размером 120×120 см². Под рукой ничего не оказалось, кроме прямоугольного листа фанеры, площадь которого равнялась площади окна, но размеры были не те: 90×160 см².

Сначала все как-то даже растерялись, но прошло немного времени и школьник Вася, вооружившись линейкой, начал быстро расчерчивать прямоугольный лист фанеры.

По наведенным линиям Вася разрезал фанерный лист всего лишь на две части, из которых и составил квадратный щит нужного размера для затемнения окна.

Найдите решение этой задачи.

138. Все идет в дело

«Выйдет ли из этого обрезка шахматная доска в 64 клетки?» — подумал я, разглядывая прямоугольный кусок доски орехового дерева с двумя прямоугольными же выступами (рис. 89). Измерив доску, я рассчитал, что смогу использовать ее всю, ничего не отбрасывая.

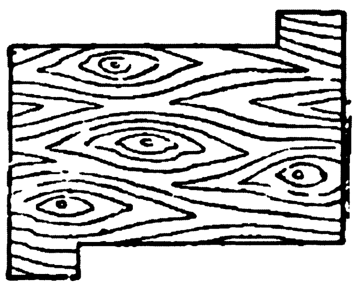


Рис. 89. Выйдет ли шахматная доска?

Далее я ее расчертил на 64 равные клетки, причем в каждом выступе оказалось по 2 клетки, и распилил доску только на 2 части, причем одинаковые и по форме и по величине, и из них склеил шахматную доску. Найдите линию разреза.

139. Головоломка

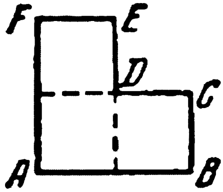


Рис. 90

Фигура *ABCDEF* (рис. 90) состоит из трех равных сплошных квадратов.

Требуется разрезать эту фигуру на 2 части так, чтобы из образовавшихся частей можно было составить квадратную рамку. Отверстие внутри рамки должно тоже иметь квадратную форму, равную каждому из трех квадратов, составляющих данную фигуру.

140. Разрубить подкову

Нарисуйте подкову и сообразите, как провести 2 прямые линии, вдоль которых можно было бы разрезать подкову на 6 частей, не перемещая их при разрезании.

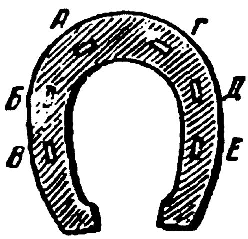


Рис. 91

141. В каждой части — дырка

А вот вам подкова с дырками для гвоздей (рис. 91). Разрубите ее двумя прямолинейными ударами на 6 частей так, чтобы в каждой части было по одной дырке.

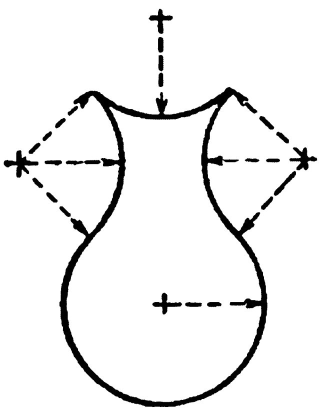


Рис. 92. Разрежьте и сложите квадрат

142. Из «кувшина» — квадрат

Перерисуйте на лист бумаги фигуру, имеющую форму кувшина, изображенную на рис. 92, и разрежьте ее двумя прямолинейными разрезами на такие 3 части, из которых можно было бы сложить квадрат.

143. Квадрат из буквы «Е»

Аккуратно начертите на листе бумаги фигуру (рис. 93), имеющую очертания буквы Е. Требуется разрезать фигуру Е только на 7 частей и не больше чем четырьмя прямолинейными разрезами и из всех получившихся частей сложить квадрат.

Замечание. Каждый острый угол в этой фигуре Е составляет половину прямого угла, а каждый тупой угол — в три раза больше острого. Соотношение между длинами сторон легко установить по рисунку.

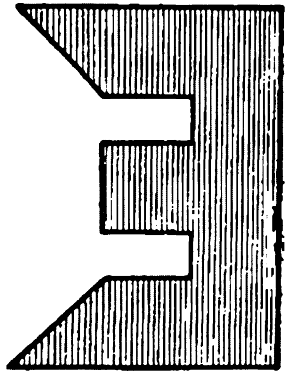


Рис. 93. Как разрезать, чтобы составить квадрат?

144. Красивое превращение

Перерисуйте на тонкий картон или плотную бумагу изображенный на рис. 94 правильный восьмиугольник и в центре вырежьте отверстие тоже в форме правильного восьмиугольника. Образовавшуюся фигуру требуется разрезать на 8 равных кусочков и, перекладывая их, составить восьмиконечную звезду, которая бы также имела восьмиугольное отверстие.

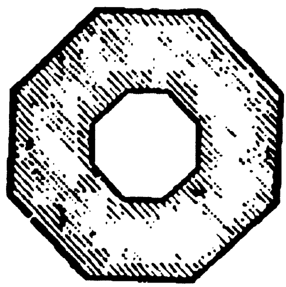


Рис. 94. Разрежьте и составьте звезду

145. Выручайте беднягу!

Помните, под номером 50 была предложена головоломка о разборной шахматной доске? Товарищи изобретателя головоломки в конце концов научились быстро составлять шахматную доску из 14 деталей. Тогда веселый шахматист решил изменить число и форму составных частей. Но тут на его беду пришла ему мысль попытаться разрезать шахматную доску на 15 одинаковых фигур, похожих на букву «Г» (рис. 95, *а*), и одну квадратную (рис. 95, *б*). С той поры потерял покой наш юный конструктор. Не удается ему разрезать шахматную доску на такие части! Теперь он склонен думать, что такой раскрой доски невозможен, и пытается это доказать, но тоже пока безуспешно. Нужно выручать беднягу.

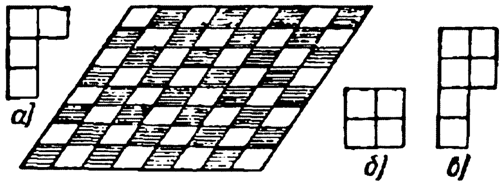


Рис. 95. Головоломка веселого шахматиста

Давайте поможем ему доказать невозможность решения поставленной им задачи, а взамен предложим разрезать шахматную доску на 10 одинаковых фигур, похожих на букву «Р» (рис. 95, *в*), и одну — похожую на букву «Г» (рис. 95, *а*).

Наша задача тоже не из легких, но решение имеет.

146. Подарок бабушке

У девочки было два квадратных куска клетчатой ткани, в 64 клетки и в 36 клеток. Девочка решила объединить их в один квадратный платок для подарка бабушке. Разумеется, при этом надо было сохранить строгое чередование белых и черных клеток. Дело осложнилось тем, что края большого куска ткани были уже обработаны и даже кисточки были сделаны на двух сторонах куска полностью, а на третьей — наполовину (рис. 96).

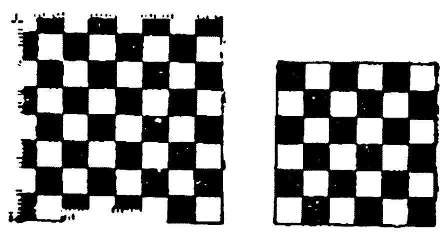


Рис. 96. Как объединить в один платок?

Выручила девочку ее конструкторская смекалка.

Каждый кусок она так остроумно разрезала на две части, что составленный из четырех получившихся частей платок имел полностью все 100 клеток, и при этом все кисточки, которые были на большом куске, остались снаружи, по краям платка.

Повторите на бумажных моделях решение девочки.

147. Задача столяра

Столяру принесли 2 одинаковые овальные доски с продолговатыми отверстиями в центре (рис. 97) и заказали из них одну круглую сплошную крышку для стола.

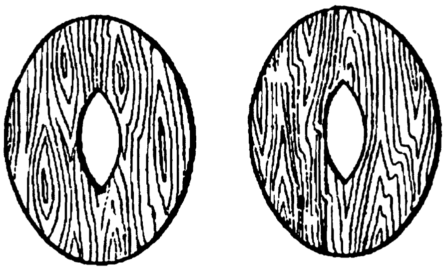


Рис. 97. Как без потерь изготовить круглую сплошную крышку?

Доски были из дерева редкой породы, и мастеру хотелось употребить их в дело полностью без каких бы то ни было обрезков.

Чтобы не делать лишних разрезов, столяр сначала сделал из плотной бумаги выкройку доски, присмотрелся к форме, кое-что проверил циркулем. Оказалось, что намерение мастера вполне осуществимо и притом с небольшим количеством разрезов каждой доски.

Как столяр распилил принесенные доски?

148. Каждому коню по конюшне

На рис. 98 изображена шахматная доска с 4 конями.

Требуется разрезать доску на 4 равные и одинаковые по форме части, причем на каждой из этих частей должно остаться по коню.

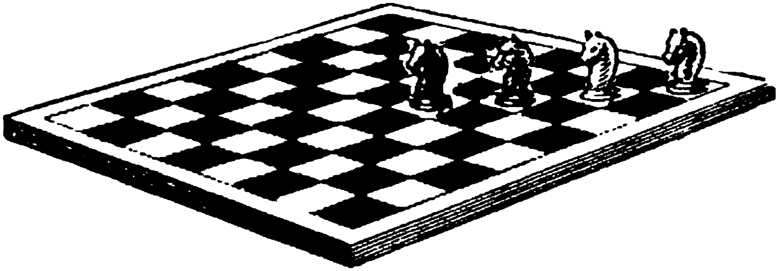


Рис. 98

149. Еще больше!

Попробуйте рассечь круг 6 прямыми линиями на наибольшее возможное число частей.

На рис. 99, например, круг рассечен на 16 частей, но это не предел. Можно показать, что предельное число частей определяется по формуле $\frac{n^2+n+2}{2}$, где n — число секущих прямых[1]).

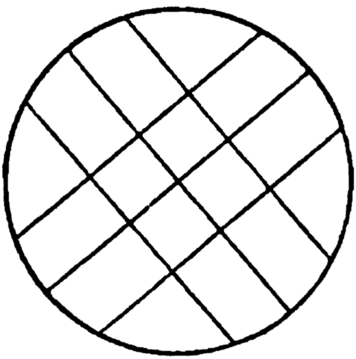


Рис. 99

При решении постарайтесь добиться симметрии в расположении прямых линий.

150. Превращение многоугольника в квадрат

Можно ли два каких угодно квадрата превратить в один? Это значит, если я нарисую два произвольных квадрата, то найдете ли вы способ разрезать их на такие части, из которых можно было бы составить *один* квадрат?

---

[1] В топологии (раздел высшей математики) доказывается, что прямую можно рассечь n точками самое большее на $C_n^1+C_n^0=n+1$ частей; плоскость можно рассечь n прямыми самое большее на $C_n^2+C_n^1+C_n^0=\frac{n^2+n+2}{2}$ частей; пространство трех измерений — n плоскостями на $C_n^3+C_n^2+C_n^1+C_n^0=\frac{n^3+5n+6}{6}$ частей и т. д.

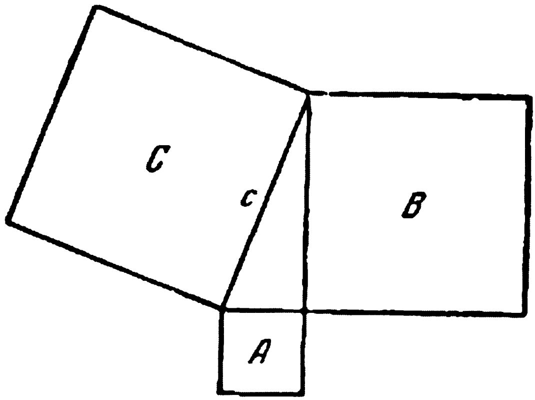


Рис. 100. $A + B = C$

Первое общее решение этой задачи приписывается древнегреческому ученому Пифагору (VI век до начала нашего летоисчисления), но задачами превращения одной фигуры в другую занимались и индусские математики (в связи с развитием замечательного строительного искусства в Древней Индии) еще за тысячу или полторы тысячи лет до Пифагора.

Интересно, что, имея два квадрата, можно заранее представить себе и тот третий квадрат, в который «укладываются» первые два. Для этого расположите данные квадраты *А* и *Б* так, чтобы стороны одного служили продолжением сторон другого (рис. 100), и соедините отрезком *с* прямой линии две вершины, как показано на рис. 100. Образуется прямоугольный треугольник. Если теперь построить еще один квадрат *С* на стороне *с* (на гипотенузе) образовавшегося прямоугольного треугольника, то он и будет тем квадратом, который можно выложить из частей первых двух квадратов.

Но как же разрезать данные квадраты? За две с половиной тысячи лет, которые отделяют нас от Пифагора, придумано очень много практических способов решения этой задачи. Вот один из них — экономный и красивый.

Расположим данные квадраты в виде фигуры *ABCDEF* (рис. 101). Отложим на стороне *AF* отрезок $FQ = AB$ и разрежем фигуру по прямым *EQ* и *BQ*. Переложим треугольник *BAQ* в положение *BCP*, а треугольник *EFQ* — в положение *EDP*; образуется квадрат *EQBP*, содержащий в себе все части данных двух квадратов. Его сторона равна гипотенузе *EQ* прямоугольного треугольника *EFQ*, а стороны данных двух квадратов равны катетам *EF* и *FQ*.

(Читатель, знакомый с геометрией, легко сам докажет равенство треугольников *BAQ*, *BCP*, *EFQ* и *EDP* и то, что *EQBP* — квадрат. Это будет иным, по сравнению со школьным, доказательством теоремы Пифагора).

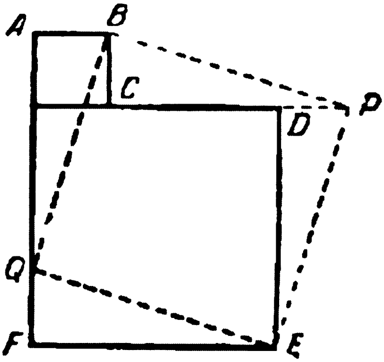


Рис. 101. Из двух квадратов — один

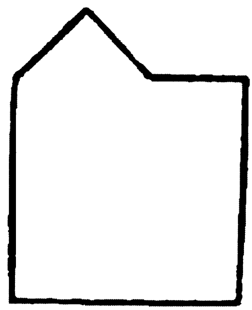


Рис. 102. Как разрезать, чтобы составить квадрат?

А теперь перерисуйте на бумагу фигуру, представляющую собой соединение квадрата и прямоугольного равнобедренного треугольника (рис. 102); разрежьте эту фигуру только на три части и составьте из них квадрат.

151. Превращение правильного шестиугольника в равносторонний треугольник

Геометрические задачи составления одной фигуры из частей другой увлекают и математиков-специалистов, и архитекторов, и просто любителей математики вот уже несколько тысяч лет.

Существуют общие приемы превращения одной фигуры в другую путем разрезания и переложения частей данной фигуры, но практически пользоваться общими приемами во многих случаях крайне неудобно.

Интересно бывает в таких задачах найти способ разрезания данной фигуры на возможно меньшее число частей. Но это нелегко и требует большого терпения и изобретательности.

Как, например, наилучшим образом разрезать данный правильный шестиугольник (рис. 103) прямолинейными разрезами, чтобы из его частей можно было составить сплошной правильный треугольник?

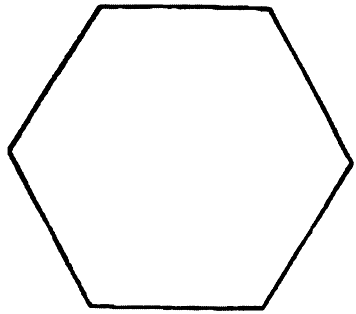


Рис. 103. Как разрезать, чтобы составить правильный треугольник?

Существует несколько решений этой задачи; в каждом из них производится деление шестиугольника только на 6 частей.

Попытайтесь найти такое решение.

Глава пятая

УМЕНЬЕ ВЕЗДЕ НАЙДЕТ ПРИМЕНЕНЬЕ

152. Пять минут на размышление

Представьте себе деревянный куб со стороной 3 дм, вся поверхность которого окрашена в черный цвет.

1) Сколько потребуется разрезов, чтобы разделить куб на кубики со стороной 1 дм?
2) Сколько получится таких кубиков?
3) Сколько кубиков будут иметь по 4 окрашенные грани?
4) » » » » по 3? » »
5) » » » » по 2? » »
6) » » » » по 1 окрашенной грани?
7) Сколько кубиков будет неокрашенных?

153. Непредвиденная встреча

Два поезда, каждый по 80 вагонов, встретились на одноколейном пути, имеющем небольшую тупиковую ветку (рис. 104).

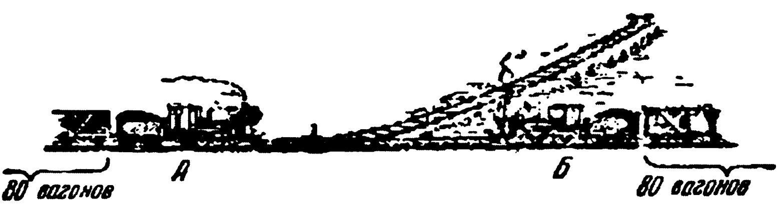


Рис. 104. Как разойтись поездам?

Как разойтись этим поездам, если тупиковая ветка может вместить паровоз и с ним не больше 40 вагонов?

154. Путевой треугольник

Основной железнодорожный путь *AB* (рис. 105) и две небольшие железнодорожные ветки *AD* и *BD* образуют путевой треугольник. Если на основном пути *AB* стоит паровоз трубой направо, то, обойдя путевой треугольник, он окажется трубой налево.

Глядя на рис. 105, легко в уме представить, как должен двигаться паровоз, чтобы «повернуться» трубой в другую сторону (считайте при этом, что вагонов на ветках нет). Но сейчас перед машинистом паровоза стоит другая задача. Ему нужно переставить местами вагоны, стоящие на ветках *AD* и *BD*: белый вагон с ветки *BD* на ветку *AD*, а черный — с *AD* на *BD*; самому же вернуться на прежнее место. На тупичке *D* за стрелкой помещается только один вагон или один паровоз.

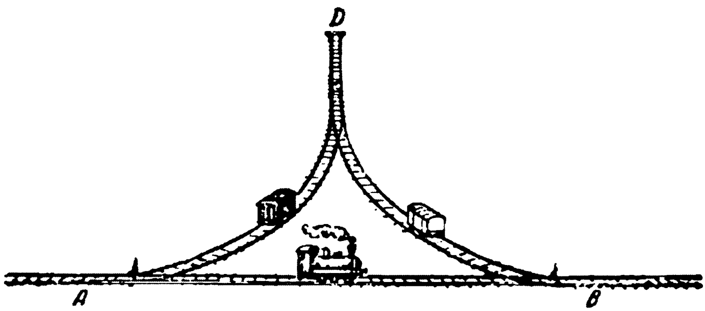


Рис. 105. Как поменять местами вагоны?

Как машинист решил эту задачу?

Если каждое сцепление и расцепление вы будете считать за ход, то могу сообщить, что машинист решил задачу в 10 ходов, но вы можете справиться и за 6 ходов.

155. Попробуйте отвесить

В пакете находится 9 кг крупы. Попробуйте при помощи чашечных весов с гирями 50 и 200 г распределить всю крупу по двум пакетам: в один — 2 кг, в другой — 7 кг. При этом разрешается произвести только 3 взвешивания.

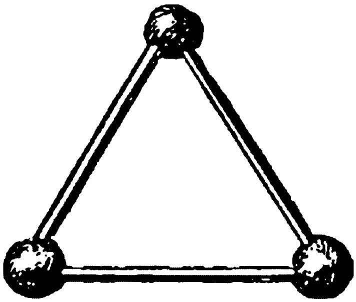


Рис. 106

156. Семь треугольников

Скрепляя концы 3 спичек шариками из пластилина, легко составить один равносторонний треугольник (рис. 106).

Возьмите теперь 9 спичек и, так же скрепляя их концы, составьте 7 равносторонних треугольников.

157. Поло́тна художника

Один чудак-художник уверял меня, что самыми целесообразными размерами полотен для его произведений будут такие, при которых площадь полотна численно равна его периметру. Не будем обсуждать вопрос, содействуют ли такие размеры полотен художественных произведений лучшему их восприятию, но попытаемся все-таки установить, какие же размеры (допустим, только в целых числах) должен иметь прямоугольник, чтобы его площадь и периметр выражались одним и тем же числом.

Это не очень легкая задача, но решение можно придумать довольно изящное.

158. Сколько весит бутылка?

На левой чашке весов (рис. 107, *а*) — бутылка со стаканом, а на правой — кувшин. Весы в равновесии.

Переставим стакан с левой чашки весов на правую, а кувшин заменим тарелкой (рис. 107, *б*). Весы опять в равновесии.

Уберем бутылку с левой чашки весов и поставим сюда 2 одинаковых кувшина, а на правой стакан заменим 2 одинаковыми тарелками (рис. 107, *в*). Оказывается при этом, что 2 кувшина весят столько же, сколько 3 тарелки.

Во сколько раз бутылка тяжелее стакана?

159. Кубики

Мастеру, делающему детские игры, дали определенное количество деревянных кубиков одинакового размера, чтобы наклеить на них нужные для игры буквы и цифры. Но общая площадь наружной поверхности всех кубиков оказалась недостаточной. Ему потребовалась вдвое бóльшая площадь.

Как мастер удвоил сумму площадей всех граней кубиков, не добавляя новых кубиков?

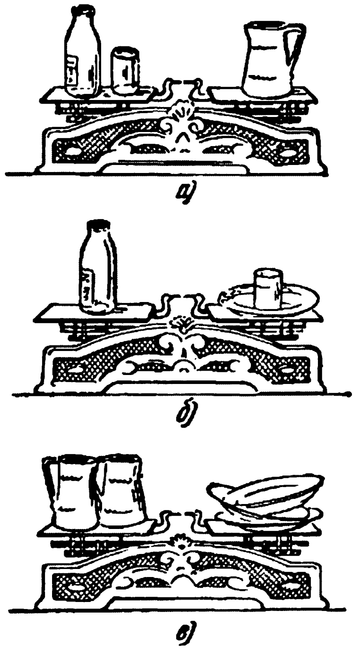


Рис. 107. В этих случаях — равновесие

160. Банка с дробью

Однажды на строительстве оросительного канала в полевых условиях потребовалось нам срочно изготовить свинцовую пластинку определенного объема. В походной мастерской свинца не оказалось; тогда мы решили расплавить охотничью дробь. Была у нас с собой стеклянная пол-литровая банка с делениями, как мензурка. Насыпали в нее дроби доверху.

Но получится ли из этой дроби пластинка нужного объема? Ведь свинец — не вода; его объем мензуркой не измеришь. Как же нам определить объем собранной дроби?

Кто-то предложил определить объем одной дробинки по формуле для объема шара и сосчитать число дробинок. Но это сложно и долго, тем более что дробинки были разной величины.

Если предмет однородный (из одного вещества), то его объем можно определить делением его веса на удельный вес вещества, из которого сделан предмет, но, как назло, никто из нас не мог вспомнить, каков удельный вес свинца, а справочника под руками не было.

И все-таки мы быстро и достаточно точно определили объем дроби, причем все расчеты состояли из одного действия — вычитания. Как мы это сделали?

161. Куда пришел сержант?

Выполняя приказ командира, сержант вышел из населенного пункта *М* по азимуту 330°. Дойдя до кургана, он пошел по азимуту 30° и дошел до отдельно стоящего дерева. Отсюда он повернул направо на 60°. Дойдя по этому направлению до моста, сержант пошел берегом реки по азимуту 150°. Выйдя через полчаса к мельнице, сержант опять изменил направление. Теперь он пошел по азимуту 210°, ориентируясь на дом мельника. Придя к дому мельника, он еще раз свернул направо и, идя по азимуту 270°, вышел точно на заданное место.

Пользуясь транспортиром, аккуратно постройте в своей тетради весь маршрут сержанта и определите, куда пришел сержант, если известно, что по каждому азимуту он проходил 2,5 км.

162. Определить диаметр бревна

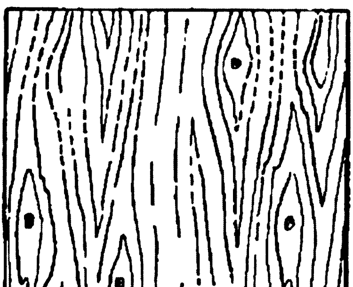


Рис. 108. Каков был диаметр бревна?

Каков примерно диаметр слоя бревна, из которого изготовлен фанерный лист, изображенный на рис. 108? Размеры листа 150 × 150 см².

Напоминаю, что диаметр окружности d приближенно вычисляется по такой формуле: $d \approx \frac{c}{3,14}$, где c — длина окружности, но не ошибитесь в решении предложенной задачи. Диаметр слоя бревна $d \neq \frac{150}{3,14}$.

163. Можно ли получить 100% экономии?

Некто узнал о трех изобретениях: одно из них экономит 30% топлива, другое — 45%, третье — 25%. Этот человек решил применить все три изобретения сразу, предполагая сэкономить 30% + 45% +25% = 100% топлива. Но разве такое возможно? Сколько процентов экономии он получит на самом деле?

164. Конструкторская смекалка

Задача 1. Как составить цепочку в 3 звена из 3 ленточек, чтобы при разрезании *любого одного* звена вся цепочка распалась на 3 части? Обычное зацепление, изображенное на рис. 109, очевидно, не годится, так как в этом случае цепочка распадается на три отдельные ленточки при разрезании только среднего звена, а не любого, как требуется условием задачи.

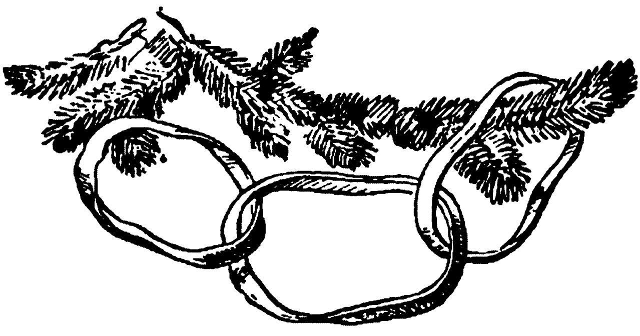


Рис. 109

Задача 2. Как составить цепочку в 5 звеньев из 5 лент так, чтобы существовало *только одно* звено, при разрезании которого цепочка распалась бы на 5 отдельных частей?

Задача 3. Как составить цепочку в 5 звеньев из 5 лент, чтобы при разрезании *любого одного* звена распалась вся цепочка на 5 отдельных частей?

165. Мишина неудача

Вот что увидел Миша Герасимов. Его старший брат Игорь взял игрушечный деревянный кубик и так искусно его распилил, что в сечении получился правильный шестиугольник (рис. 110), потом карандашом провел отрезки, соединяющие вершины шестиугольника через одну, — получилась шестиконечная звезда.

В треугольных промежутках между лучами звезды (на рис. 110 — незаштрихованные треугольники) Игорь ножиком срезал тонкий слой дерева, на звезду наклеил резиновую пластинку, аккуратно обрезал ее по контуру звезды и сказал: «Штамп готов».

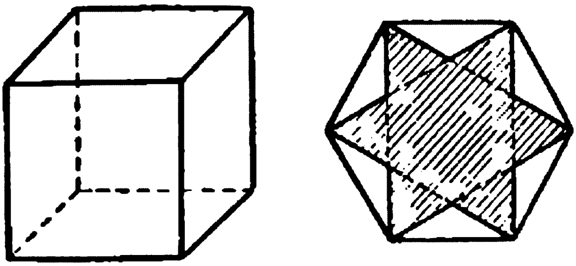


Рис. 110

Мише это понравилось, и он как художник стенной газеты своего класса решил, что ему очень полезно было бы иметь точно такой же штамп пятиконечной звезды.

Он знал, что пятиконечную звезду можно изготовить таким же способом из правильного пятиугольника (рис. 111). С этой целью Миша тоже взял кубик из своего «строительного материала» и стал пытаться распилить его так, чтобы в сечении получился правильный пятиугольник. Но Мишу постигла неудача.

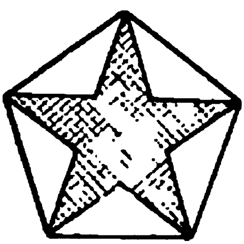


Рис. 111

Как он ни пытался одним разрезом кубика получить правильный пятиугольник, ничего не выходило. Получались правильные треугольники разных размеров, получались квадраты и правильные шестиугольники, причем уже только одного размера, а пятиугольника — ни одного.

Долго Миша бился, перепилил все кубики из своего «строительного материала», но так и не понял — то ли он не может смекнуть, как разрезать кубик, то ли вообще невозможно получить правильный пятиугольник в сечении куба плоскостью.

А все потому, что Миша Герасимов еще не так много занимался геометрией и пока не обладал нужным геометрическим мышлением.

Нужно помочь Мише разобраться в следующих вопросах:

1) Может ли в сечении куба плоскостью получиться правильный пятиугольник?

2) Как распилить кубик, чтобы в сечении получился правильный треугольник или правильный шестиугольник?

3) Можно ли в сечении куба плоскостью получить правильный многоугольник с числом сторон большим, чем 6?

166. Найти центр окружности

Как найти центр начерченной окружности (рис. 112) при помощи одного только чертежного треугольника без делений и карандаша (причем карандаш разрешается использовать только для того, чтобы проводить необходимые линии)?

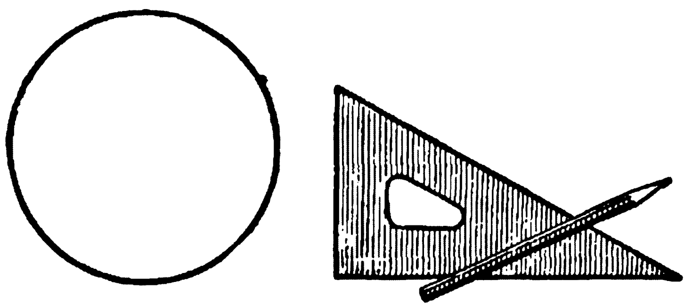


Рис. 112. Найдите центр окружности

167. Какой ящик тяжелее?

Имеется 2 одинаковых ящика кубической формы, наполненные шарами одинакового удельного веса (то есть изготовленными из одного и того же материала). В первом ящике находится 27 одинаковых крупных, а во втором — 64 одинаковых мелких шара.

Какой ящик тяжелее?

Предполагается, что в обоих ящиках шары уложены вплотную доверху так, что в каждом слое находится по одинаковому числу их, и крайние шары каждого слоя касаются стенок ящика. Если ящик закрыть, то крышка также будет касаться шаров верхнего слоя.

168. Удивительный куб

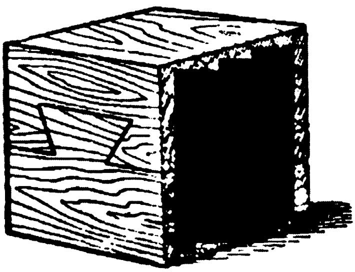


Рис. 113. Куб с секретом

Однажды я увидел интересный деревянный куб.

Он составлен из двух частей, соединенных плотно при помощи шипов, очертания которых заметны на каждой из четырех боковых граней куба (рис. 113). Части куба не склеены и, очевидно, должны разъединяться, но как?

Я пытался тянуть их вверх и вниз, и влево и вправо, и вперед и назад — безуспешно.

Не догадаетесь ли вы, как же все-таки разъединялись части куба и какой вид имела каждая из них?

169. Геометрия на шаре

Каждому, кто изучал геометрию, приходилось, конечно, решать задачи на построение при помощи циркуля и линейки, то есть вычерчивая дуги окружностей и прямые линии. При этом все необходимые построения производились обычно на бумаге или классной доске.

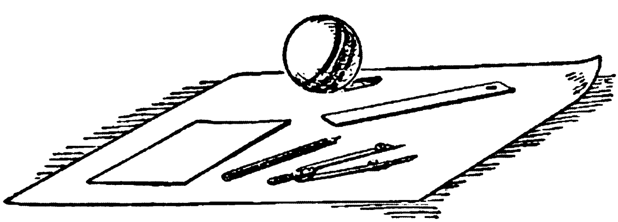


Рис. 114. Как построить отрезок, равный диаметру шара?

Но вряд ли приходилось вам, решая геометрическую задачу, делать построения не только на плоском листе бумаги, но и на какой-нибудь кривой поверхности, предположим, на поверхности шара.

Именно таким путем можно, например, определить диаметр данного шара, если пользоваться только циркулем и линейкой.

Положите на стол какой-нибудь шар, например теннисный (рис. 114), возьмите лист бумаги, циркуль, линейку без делений, карандаш и подумайте, как построить на бумаге *отрезок*, равный *диаметру* шара.

170. Потребуется смекалка

Деревянный брусок (прямоугольный параллелепипед) с ребрами длиной 8, 8 и 27 см (рис. 115) требуется распилить на 4 части, из которых можно было бы составить куб.

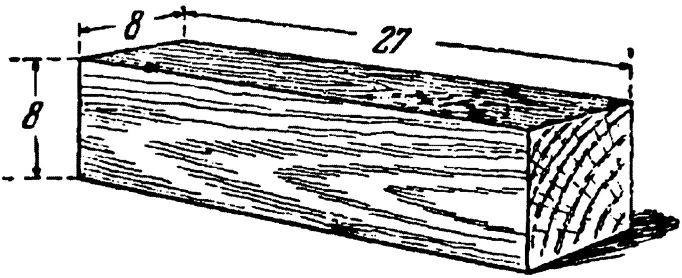


Рис. 115. Как из бруска составить куб?

Желательно, конечно, не пилить брусок наудачу — что выйдет, — а сначала подумать, посчитать да спланировать на чертеже.

Имейте в виду, что это потребует от вас хороших пространственных представлений и сообразительности.

171. Сборные многоугольники

Строители могут целый дом собрать из готовых частей (блоков), изготовленных на заводе. Почему бы и нам не попытаться осуществить аналогичное «строительство» в геометрии — с той, правда, разницей, что «блоками» у нас будут многоугольники, причем одинаковые по форме и размерам. Представьте себе, что в вашем распоряжении имеется неограниченное количество равных между собой многоугольников. Требуется, плотно прикладывая многоугольники друг к другу, составить из них один многоугольник такой же формы, какую имеют данные многоугольники, но большего размера, точнее: составить многоугольник, подобный данным.

Прикладывая друг к другу многоугольники, разрешается их как угодно поворачивать и переворачивать, но не гнуть и не разрывать на части.

Не каждый многоугольник пригоден для этой цели. Так, например, равные правильные шестиугольники хорошо укладываются на плоскости, но составить из них один правильный шестиугольник невозможно.

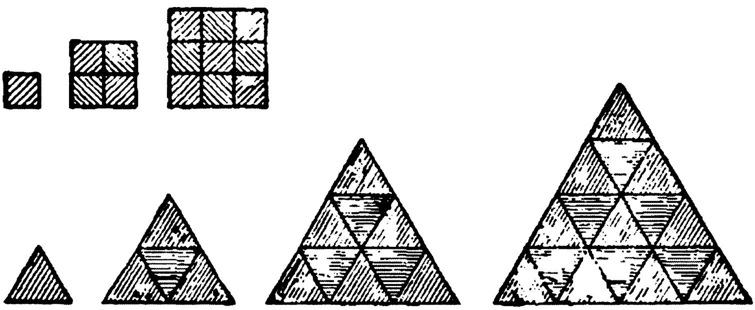


Рис. 116. Из квадратов и правильных треугольников легко составляются подобные им фигуры

Из равных квадратов или равных равносторонних треугольников легко составляются подобные им фигуры (рис. 116).

Весьма пригодными «блоками для строительства» себе подобных фигур будут многоугольники, изображенные на рис. 117, и аналогичные им, которые можно образовать из равных квадратов (например, из клеток бумаги) или из равных равносторонних треугольников.

Составить многоугольники, подобные изображенным на рис. 117, можно как из 4 фигур каждого данного вида, так и из 9 или 16, или еще большего числа данных многоугольников.

На рис. 118 показано для примера, как из 4 многоугольников *а*) или *б*) или из 16 многоугольников *в*), изображенных на рис. 117, составляются подобные им фигуры.

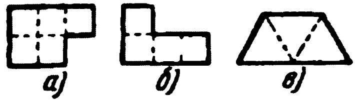


Рис. 117. Удобные «блоки»

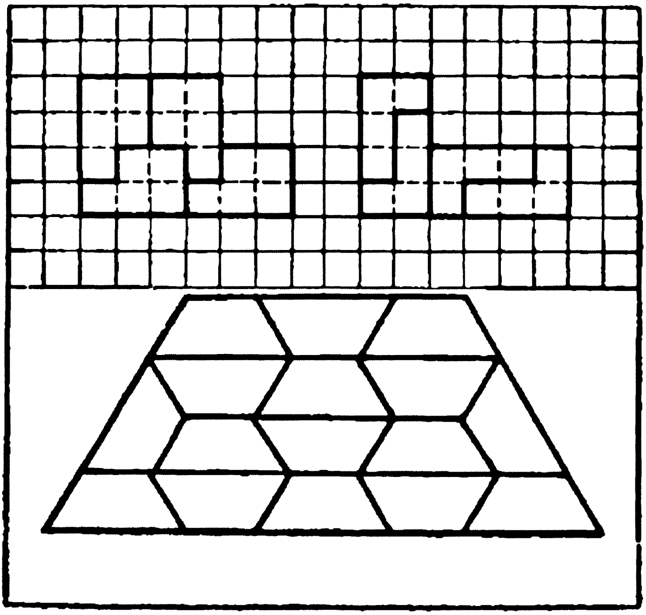


Рис. 118. Фигуры, «подобные блокам», из которых они составляются

Для такого «сооружения» фигур, подобных данной, как видите, необходимо иметь не меньше чем 4 одинаковые первоначальные фигуры, а затем либо 9, либо 16, вообще n^2 фигур, где n — определенное целое число.

И это вполне закономерно. Здесь практически подтверждается известная теорема геометрии о том, что площади подобных многоугольников относятся как квадраты их соответственных линейных размеров.

При составлении многоугольника из набора одинаковых, подобных ему многоугольников, мы можем ожидать, что длины его сторон будут больше длин соответствующих сторон первоначально данного многоугольника в 2 или в 3, 4,..., n раз. Тогда его площадь будет в 2^2 или в 3^2, 4^2,..., n^2 раз больше площади первоначального многоугольника и, следовательно, для «строительства» требуемой фигуры понадобится соответственно 4 или 9, 16,..., n^2 первоначальных фигур.

Задача. Составьте многоугольники, подобные изображенным на рис. 117: 1) из 9 фигур *а*; 2) из 9 фигур *б*; 3) из 4 фигур *в*; 4) из 16 фигур *б*; 5) из 9 фигур *в*.

Приготовьте из бумаги (в прямую и косую клетку) другие «блоки», аналогичные изображенным на рис. 117 (нарежьте их в большом количестве), и устройте соревнование — кто быстрее и из меньшего числа многоугольников данного вида составит подобные им фигуры.

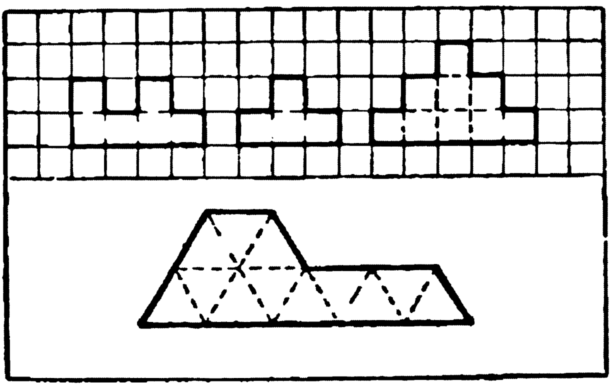


Рис. 119. Примеры возможных «блоков»

Имейте в виду, что не каждый многоугольник можно составить из 4 или 9 подобных ему фигур.

Самым меньшим числом требующихся фигур может оказаться и 16, и 25, и 36, и вообще n^2, где n — любое целое число. Заранее это число не известно, поэтому и интересно, кому удастся для составления многоугольника использовать наименьшее количество данных фигур. Примерные «блоки» изображены на рис. 119. Можете их всячески разнообразить, но помните при этом, что существуют «блоки», из которых нельзя сложить подобную им фигуру.

172. Любопытный прием составления подобных фигур

Если отказаться от требования составить многоугольник из наименьшего числа подобных ему фигур, то можно указать любопытный прием решения таких задач путем использования ломаных линий одинаковой формы.

Возьмем бумагу в клетку, где каждую клетку назовем единичным квадратом. В качестве данного многоугольника сначала будем иметь в виду такой, который может быть составлен из единичных квадратов. Обозначим каждый такой многоугольник буквой P, а соответствующий подобный многоугольник — буквой P'.

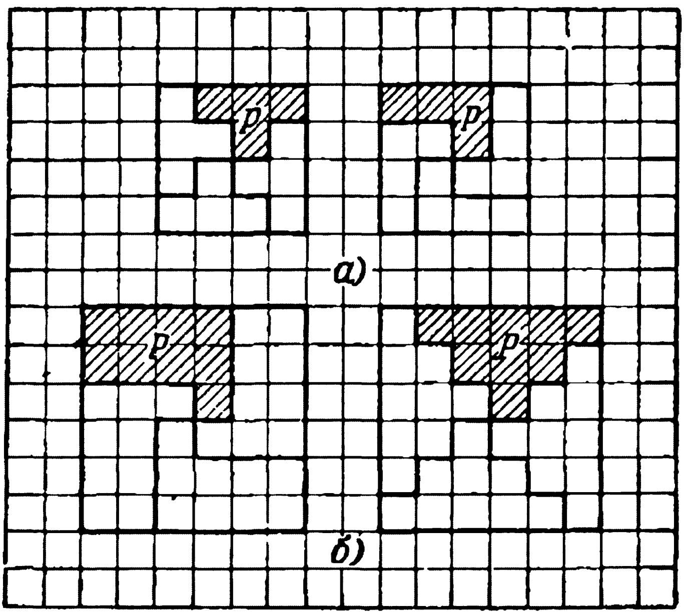


Рис. 120. Примеры разбиения на «блоки»

Построим квадрат, содержащий в себе произвольное число единичных квадратов. Разумеется, это число кратно 4 ($4n$). Из центра этого квадрата вдоль сторон единичных квадратов, по направлению к одной из его сторон проведем какую-нибудь ломаную линию, затем из той же центральной точки, под прямым углом к первой ломаной линии проведем вторую ломаную такой же конфигурации, как первая. Из той же центральной точки, под прямым углом ко второй ломаной линии, проведем такую же третью ломаную, а под прямым углом к третьей — четвертую (например, как на рис. 120).

Эти ломаные разрежут квадрат на 4 равные фигуры, каждую из которых будем считать многоугольником P.

Если в каждую фигуру P входит n единичных квадратов, то, следовательно, из n больших квадратов наверняка можно составить многоугольник P'. А так как в одном большом квадрате 4 фигуры P, то, следовательно, многоугольник P' может быть составлен из $4n$ фигур P.

Таким образом, например, из каждых 4 больших квадратов, изображенных на рис. 120, *а* (а это значит из 16 заштрихованных многоугольников P) легко составить подобные им многоугольники P'.

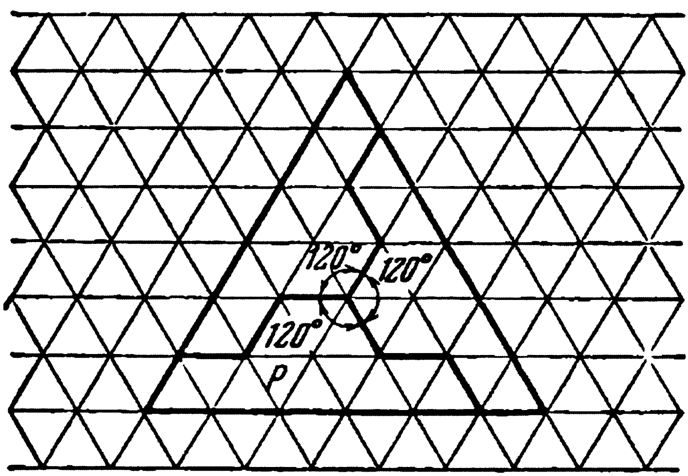


Рис. 121. Пример разбиения на косоугольные «блоки»

Для образования многоугольников, подобных девятиклеточным многоугольникам *P*, изображенным на рис. 120, *б*, достаточно[1] 36 фигур *P*. Этот же прием можно распространить и на многоугольники, составленные из равных равносторонних треугольников (типа *в* на рис. 117).

Готовой бумаги, разграфленной на равносторонние треугольники, обычно не бывает, поэтому заблаговременно и аккуратно приготовим ее сами. Обозначения примем те же.

Построим теперь большой треугольник (рис. 121), содержащий в себе произвольное, но кратное 3 число единичных равносторонних треугольников ($3n$). Из центра этого треугольника по направлению к его сторонам проведем вдоль сторон единичных треугольников 3 ломаные линии так, чтобы углы между ними были по 120° и все они имели одинаковую конфигурацию (например, как на рис. 121). Эти ломаные разрежут треугольник на 3 равные фигуры, каждую из которых будем считать первоначальным многоугольником *P*.

Если в каждую фигуру *P* входит n единичных треугольников, а 3 фигуры *P* составляют большой треугольник, то из n таких больших треугольников легко составить P' (фигуру, подобную многоугольнику *P*), то есть для составления фигуры P' достаточно[2] $3n$ фигур *P*.

Теперь ответьте на следующие вопросы:

1) Какое число многоугольников *P*, изображенных на рис. 120, *б*, будет *достаточным* для составления подобного многоугольника P'? Опытным путем проверьте, будет ли это число фигур *P* наименьшим возможным.

[1] Предложенный способ составления многоугольников P', подобных данным *P*, обеспечивает нас некоторым *достаточным* количеством первоначальных фигур *P*; если же все фигуры *P* вырезать из образовавшего их квадрата, то есть разъединить их между собой и пользоваться ими независимо, то для составления многоугольника P' может оказаться *необходимым* меньшее число фигур *P*.

[2] Аналогично.

2) Какие еще многоугольники P можно образовать при помощи ломаных линий из такого квадрата, как на рис. 120, *б*, и из такого треугольника, как на рис. 121?

Если вам понравился изложенный здесь прием составления многоугольника из подобных ему фигур, то подумайте, как его использовать для образования первичных многоугольников не из квадрата, а из прямоугольника.

173. Шарнирный механизм для построения правильных многоугольников

Не исключено, что вам знакомы затруднения, связанные с необходимостью построения правильного пяти-, семи- или девятиугольника. Циркуль и линейка здесь недостаточны для точного построения, но вы можете изготовить несложный механизм, пригодный для построения любого правильного n-угольника от $n = 5$ до $n = 10$.

Механизм состоит из подвижных стержней или планок, образующих два равных параллелограмма $ABFG$ и $BCHK$ (рис. 122). Стержень DE прикреплен к ползункам D и E, свободно перемещающимся: D вдоль AG и E вдоль BK. Размеры стержней таковы, что $AB = BC = CD = DE$. При любом изменении положения D

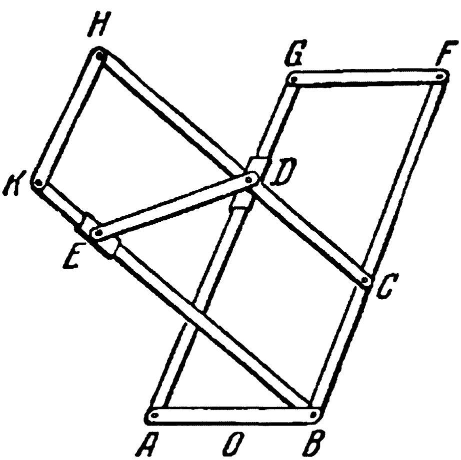


Рис. 122. Механизм для построения правильного многоугольника

на AG и E на BK параллелограммы $ABFG$ и $BCHK$ остаются равными; остаются равными также и трапеции $ABCD$ и $BCDE$, обеспечивая тем самым при любом положении стержней также и равенство углов n-угольника, четырьмя последовательными сторонами которого всякий раз будут AB, BC, CD и DE, а внутренними углами ABC, BCD и CDE. Такое соединение двух шарнирных параллелограммов при достаточной их длине дает возможность единообразным приемом механически строить любой правильный n-угольник от $n = 5$ до $n = 10$.

Для построения квадрата, конечно, нет нужды в этом механизме, но получился бы и квадрат, если бы можно было практически совместить E с A. Практические способы построения правильных n-угольников для $n = 5, 6, 7, 8, 9$ и 10 при помощи шарнирного механизма основаны на следующих свойствах соответствующих многоугольников:

а) $\angle DOB = 90°$ у пятиугольника (рис. 123, *а*);
б) $\angle EAB = 90°$ у шестиугольника (рис. 123, *б*);
в) $\angle EOB = 90°$ у семиугольника (рис. 123, *в*),
г) $\angle EBA = 90°$ у восьмиугольника (рис. 123, *г*);
д) $\angle EAB = 60°$ у девятиугольника (рис. 123, *д*);
е) $\angle DAB = 36°$ у десятиугольника (рис. 123, *е*).

Для вычерчивания при помощи шарнирного механизма правильных n-угольников в случае $n = 5, 6, 7$ или 8 следует предварительно построить прямые углы Y_1OX, Y_2AX, Y_3OX, Y_4BX, затем наложить механизм стержнем AB на прямую AB, совмещая (соответственно чертежам *а–г*) либо точки O, либо точки B. Далее, прижав к бумаге стержень AB, следует вращать остальные стержни до совпадения D с прямой OY_1 (для пятиугольника) или до совпадения E с прямой AY_2 (для шестиугольника), или до совпадения E с OY_3 (для семиугольника) и, наконец, до совпадения E с BY_4 (для восьмиугольника).

Для вычерчивания правильных n-угольников в случае $n = 9$ или 10 следует предварительно построить лучи AY_5 и AY_6 так, чтобы $Y_5AX = 60°$, а $Y_6AX = 36°$, затем наложить механизм стержнем AB на прямую AB, совмещая точки A, и, прижав

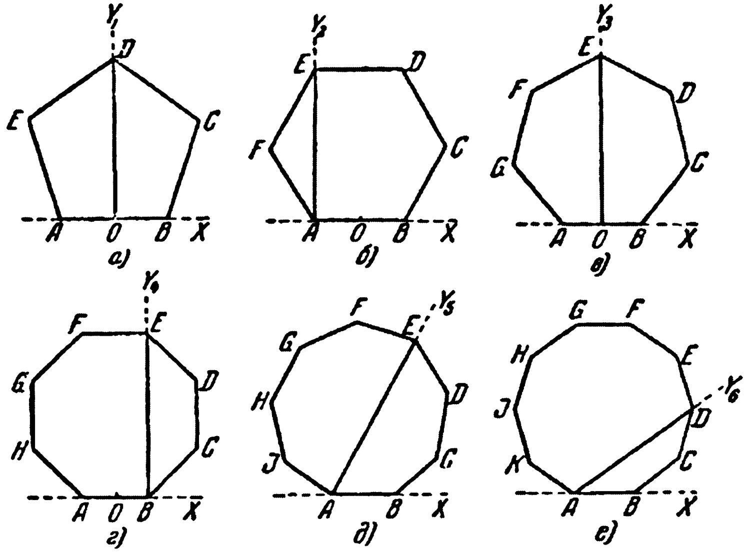


Рис. 123. Некоторые свойства правильных многоугольников

к бумаге стержень AB, вращать остальные стержни до совпадения E с AY_5 (для девятиугольника) или до совпадения D с AY_6 (для десятиугольника). Жестко закрепив механизм в нужном положении, мы получим 4 последовательные стороны (и 5 вершин) искомого n-угольника. Имея 4 стороны n-угольника, нетрудно достроить его весь последовательным поворачиванием «шаблона», образованного закрепленными стержнями.

Очевидно, что длина каждого построенного n-угольника будет равна длине стержня AB. Если понадобится многоугольник иного размера, то его можно получить подобным преобразованием построенного многоугольника.

Теоретически построение точно, практически же точность построения будет определяться степенью аккуратности изготовления прибора.

Описанный механизм может быть изготовлен из дерева или легкого металла.

Задача. Вы, конечно, умеете делить угол пополам, пользуясь циркулем и линейкой. Так вот, сообразите, как построить угол 1°, пользуясь сначала описанным шарнирным механизмом, а затем циркулем и линейкой.

Глава шестая

ДОМИНО И КУБИК

А. Домино

Игра домино состоит чаще всего из 28 прямоугольных плиток — костей (рис. 124). Каждая кость разделена на 2 квадрата, на которые нанесены точки. По квадратам точки распределены так, что группа точек на каждой кости представляет одну из возможных комбинаций по 2 из 7 чисел: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. В соответствии с этим каждая кость домино характеризуется двумя числами: числом точек, содержащихся в одном квадрате, и числом точек, содержащихся в другом квадрате. Сумма всех точек кости определяет число ее «очков». Если обе половинки кости содержат одинаковое количество очков или обе «пустые», то такая кость называется «двойной», или «дубль». Вместо полного изображения кости иногда просто будем записывать рядом 2 цифры (с черточкой между ними), показывающие число очков на каждой половине кости. Так, запись 0–5 означает кость, в одном квадрате которой нет точек (0), а в другом — 5 точек (5); запись 4–6 означает кость с 4 и 6 точками и т. д.

Способ игры в домино настолько общеизвестен, что описывать его нет нужды. Напомню только основное правило. К любому из квадратов выложенной на столе кости следует приставлять такую кость, квадрат которой имеет столько же очков, сколько находится на квадрате выставленной кости.

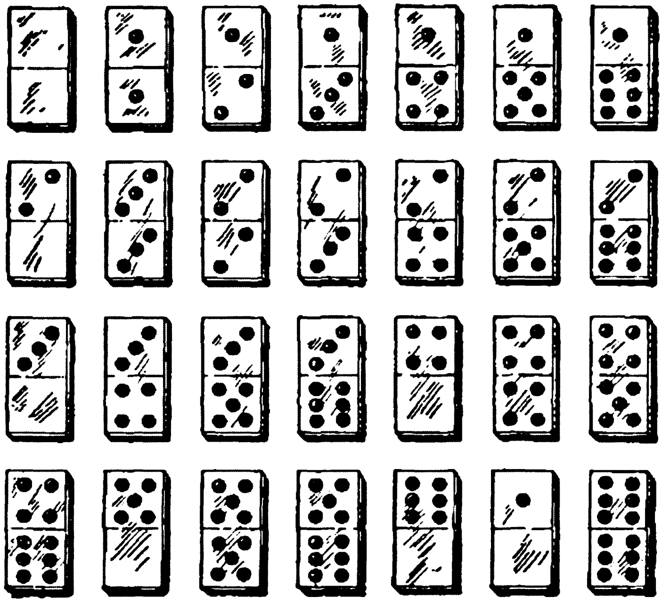


Рис. 124. 28 костей домино

Обозначения всех 28 костей домино можно расположить следующим образом:

0-6	1-6	2-6	3-6	4-6	5-6	6-6
0-5	1-5	2-5	3-5	4-5	5-5	
0-4	1-4	2-4	3-4	4-4		
0-3	1-3	2-3	3-3			
0-2	1-2	2-2				
0-1	1-1					
0-0						

Сама по себе игра в домино не представляет большого математического интереса. Но если вы имеете полный набор костей домино, то поупражняйтесь в решении следующих любопытных задач и головоломок.

174. Сколько очков?

Опираясь на основное правило игры домино (см. выше), решите такую задачу. Все 28 костей домино в соответствии с правилами игры выложены на стол цепочкой так, что на одном ее конце оказалось 5 очков. Сколько очков должно быть на другом конце цепочки?

Сначала сообразите в уме, а потом проверьте практически.

175. Два фокуса

Первый фокус. Незаметно спрятав одну из костей домино (только не «дубль») и стараясь не привлекать внимания своих друзей к тому, что костей осталось 27, а не 28, предложите им выложить все имеющиеся кости в виде цепочки по правилам игры, начиная с любой кости (можно позволить оставить неиспользованными только «дубли»). Ваше задание им удастся выполнить без затруднений, но *вы сможете заранее предсказать числа очков*, которые получатся на концах цепочки.

Это будут числа, которые содержатся в квадратах спрятанной вами кости домино. Почему?

Второй фокус. Возьмите 25 костей домино, переверните их «лицом» вниз и положите рядом одну за другой так, чтобы они соприкасались более длинными сторонами. Затем объявите, что вы отвернетесь или даже уйдете в другую комнату, а кто-либо пусть переместит какое-либо число костей (но не более 12) с правого конца на левый. Вы беретесь угадать число перемещенных костей.

Приготовляясь к «угадыванию» и переворачивая кости домино «лицом» вниз, 13 из них вы расположите в порядке убывающей последовательности целых чисел от 12 до 0 (рис. 125), а справа от них остальные 12 в произвольном порядке.

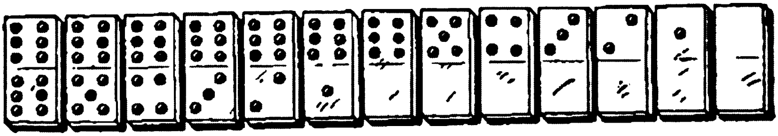


Рис. 125. Кости расположены в порядке убывания числа очков

Вернувшись в комнату, вы открываете *среднюю* (то есть по счету тринадцатую от конца) кость, число очков которой непременно укажет число перемещенных в ваше отсутствие костей домино.

Почему так?

176. Выигрыш партии обеспечен

Допустим, играют в домино четверо: *А* и *В* против *Б* и *Г*. Кости перед началом игры поделены поровну, то есть каждый игрок имеет по 7 костей.

Попробуем выяснить, от чего зависит выигрыш партии.

Конечно, он в какой-то мере зависит от искусства игроков, но возможны и такие случаи первоначального распределения костей между двумя парами играющих, когда первая пара *обязательно выиграет* в том смысле, что один из игроков этой пары раньше других выложит все свои кости.

Пусть, например, *А* имеет такие кости:

1–0 1–1 1–2 1–3 0–4 0–5 0–6,

а *Г* имеет остальные кости с нулями и единицами, то есть такие:

0–0 0–2 0–3 1–4 1–5 1–6

и еще какую-либо кость.

Остальные кости принадлежат игрокам *Б* и *В*, безразлично кому какие.

В этом случае вся игра сведется к поединку между игроком *А* первой пары играющих и игроком *Г* второй пары, а два остальных игрока (*Б* и *В*) даже не смогут положить ни одной кости!

Игрок *А* начинает и ставит: 1–1; *Б* и *В* досадуют: у них нет подходящей кости. *Г* может положить любую из трех костей: 1–4, 1–5 или 1–6. После этого *А* должен положить 4–0, или 5–0, или 6–0. *Б* и *В* снова «пасуют», так как у них нет ни единичек, ни нулей. *Г* может поставить любую кость из оставшихся, но у *А* всегда есть такой ответ, который создает на концах цепочки или 0, или 1.

В конце концов *А* выложит все кости, *Б* и *В* не положат ни одной, а у *Г* останется одна. Партию выиграла пара *А* и *В*. (Проведите эту партию от начала до конца.)

При первоначальном распределении между играющими костей домино комбинации из нулей и единиц могут быть заменены соответствующими комбинациями чисел 2, 3, 4, 5 и 6.

Легко сообразить, что число всех партий, аналогичных разобранной, равно числу всех простых сочетаний из 7 элементов по 2, то есть число таких партий равно 21. Вероятность получить *случайно* одну из таких партий весьма мала.

В приведенном примере партия продолжалась до тех пор, пока не кончились кости у одного из партнеров. Но бывает и так, что после нескольких ходов игра замыкается, так как ни у одного из игроков нет подходящей кости. В этом случае выигравшей считается та пара игроков, у которой сумма очков на оставшихся костях будет меньше.

Попробуйте догадаться по косвенным данным одной из таких коротких партий, какие кости были выложены на стол.

Играют те же пары: *А* с *В* и *Б* с *Г*. У каждого по 6 костей, а 4 кости остаются закрытыми, но игроки договорились «прикуп» не брать.

Кости игрока *А* известны:

2–4 1–4 0–4 2–3 1–3 1–5.

У партнера *В* — 5 двойных костей («дублей»). *Г* имеет 2 двойные кости; сумма очков на всех его костях 59.

Игрок *А* начал игру с кости 2–4, *Б* пасует, *В* приставляет, *Г* пасует, *А* приставляет, *Б* опять пасует, *В* приставляет и закрывает игру. Пара *Б* и *Г* проиграла партию, так и не сделав ни одного хода. У партнеров *А* и *В* осталось на руках 35 очков, а у партнеров *Б* и *Г* — 91 очко. Сумма очков на 4 выставленных костях равна 22.

Определите по этим данным, какие 4 кости остались неиспользованными (закрытыми) и какие 4 кости были выставлены.

177. Рамка

Прикладывая кости домино одну к другой по правилам, которые приняты в игре, сложите квадратную рамку. Используйте при этом все 28 костей и сложите их так, чтобы вдоль каждой стороны квадрата сумма очков равнялась 44.

178. Рамка в рамке

Сложите все 28 костей домино в форме фигуры, изображенной на рис. 126, так, чтобы суммы очков вдоль каждой из 8 сторон фигуры были одинаковыми.

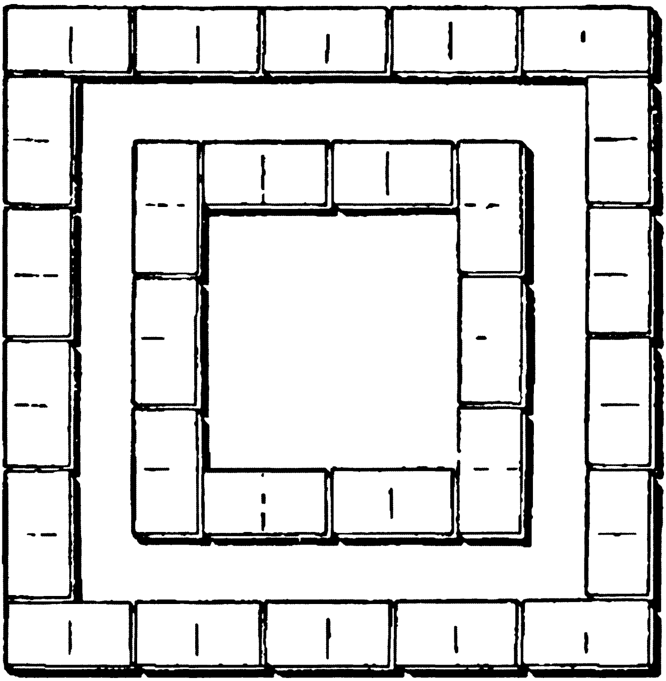


Рис. 126. Суммы очков вдоль сторон должны быть одинаковыми

Допускается при этом произвольное «сцепление» костей, то есть теперь нет нужды прикладывать кости такими половинками, которые непременно содержали бы по одинаковому числу очков.

179. «Окошки»

Из костей домино можно складывать «окошки» с одинаковыми суммами очков вдоль каждой стороны каждого отдельного «окошка» (рис. 127).

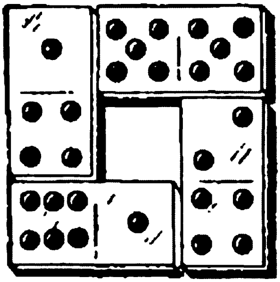


Рис. 127. «Окошко»

Используя все 28 костей домино, составьте 7 одинаковых «окошек», обладающих указанным свойством, среди которых не было бы «окошка», изображенного на рис. 127.

Замечания. 1) Числа очков в угловых квадратах входят в счет дважды: вдоль горизонтальной стороны и вдоль вертикальной стороны. 2) Суммы очков должны быть одинаковыми только вдоль сторон каждого отдельного «окошка». У разных «окошек» они могут быть различными.

180. Волшебные квадраты из костей домино

Из костей домино можно составлять не только «окошки» и «рамки», но и сплошные квадраты, да еще и «волшебные».

Если неповторяющиеся числа расположены в форме квадрата так, что суммы чисел *в каждом ряду* как горизонтальном, так и вертикальном и в каждой из двух диагоналей будут *одинаковы*, то такой квадрат чисел называется «волшебным»[1].

Так, например, из всех семи бланшей (так называют кости домино, на одной или на обеих половинках которых нет очков) и еще двух костей (1–6 и 2–6) очень легко составить волшебный квадрат (рис. 128) с постоянной суммой 12.

Примечание. В этом и других волшебных квадратах, составленных из костей домино, строкой, столбцом и диагональю считается полоса, охватывающая соответствующий ряд плиток (см. рис. 128).

---

[1] Подробнее о числовых волшебных квадратах см. в двенадцатой главе.

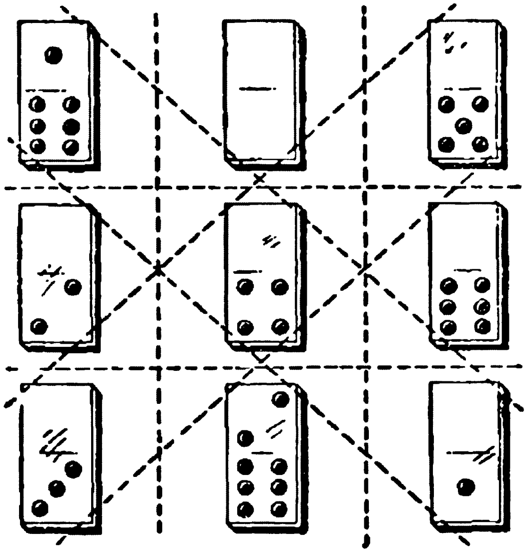


Рис. 128. Волшебный квадрат с суммой 12

Для изображения волшебного квадрата-домино удобнее такая запись:

1-6	0-0	0-5
0-2	0-4	0-6
0-3	2-6	0-1

или в числах:

7	0	5
2	4	6
3	8	1

Любопытно заметить, что числа очков взятых девяти костей представляют собой 8 первых чисел натурального ряда: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, да еще 0.

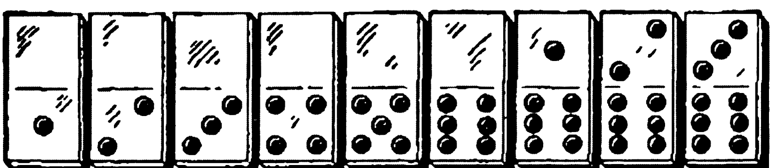


Рис. 129. Девять первых чисел натурального ряда

Если же взять 9 костей, числа очков которых будут девятью первыми членами ряда натуральных чисел, например, такие, как на рис. 129, то из них можно составить волшебный квадрат с постоянной суммой 15 (рис. 130).

Аналогичные квадраты можно построить из костей, содержащих все двойки или тройки, или четверки, и еще двух соответственно подобранных костей. Константы (постоянные суммы) этих квадратов будут 18, или 20, или 24.

Можно сконструировать волшебные квадраты из большего числа костей: из 16, 25 и т. д.; при этом допускается использование повторяющихся чисел.

В качестве примера приведем схему волшебного квадрата, составленного из 16 костей домино с постоянной суммой 18:

2-6	1-2	1-3	0-3
1-4	0-2	3-6	1-1
0-5	1-5	0-1	0-6
0-0	2-5	0-4	1-6

Он составлен из костей, содержащих все нули, все единицы, и еще трех костей: 2–5; 2–6; 3–6. Сумма очков в каждом столбце, каждой строке и диагонали этого квадрата равна 18. Некоторые из костей содержат по равному числу очков, например $1 + 4 = 0 + 5$ (первый столбец), $2 + 5 = 1 + 6$ (последняя строка) и т. д.

Полученный квадрат обладает еще тем интересным свойством, что в нем можно первый столбец передвинуть на четвертое место или верхнюю строку перенести вниз и опять-таки получится волшебный квадрат. Если в этом квадрате все кости, содержащие нули и единицы, заменить костями, число очков которых больше на 1, на 2 или на 3, то опять получим волшебные квадраты. Наконец, если в любом из таких квадратов каждую кость заменим *дополнительной*[1] костью, то опять получим волшебный квадрат.

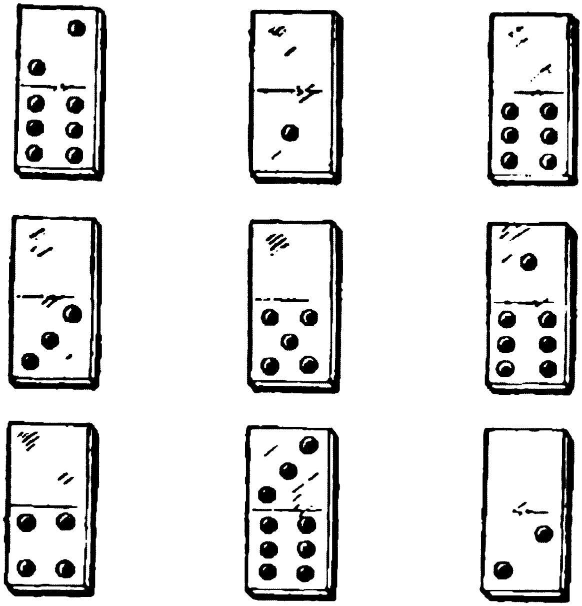


Рис. 130. Волшебный квадрат с суммой 15

Как видите, домино дает богатый материал для упражнений с волшебными квадратами. Решите теперь следующие задачи.

Задача 1. Составьте волшебный квадрат с постоянной суммой, равной 21, из девяти костей, данных на рис. 131.

Задача 2. Подберите 9 костей домино, числа очков которых образуют последовательность 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 и 12, и составьте из них волшебный квадрат. Какова константа (постоянная сумма) этого квадрата?

---

[1] Кости домино называются *дополнительными*, если числа очков в квадратах одной кости дополняют *до шести* числа очкво в квадратах другой кости. Таковы, например, кости 2–3 и 4–3 или 1–2 и 5–4 и т. д. В комплекте из 28 костей есть 4 кости: 0–6; 1–5; 4–2 и 3–3, которые *дополняют сами себя.*

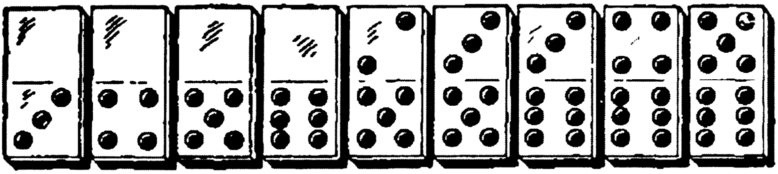


Рис. 131. Составьте волшебный квадрат с суммой 21

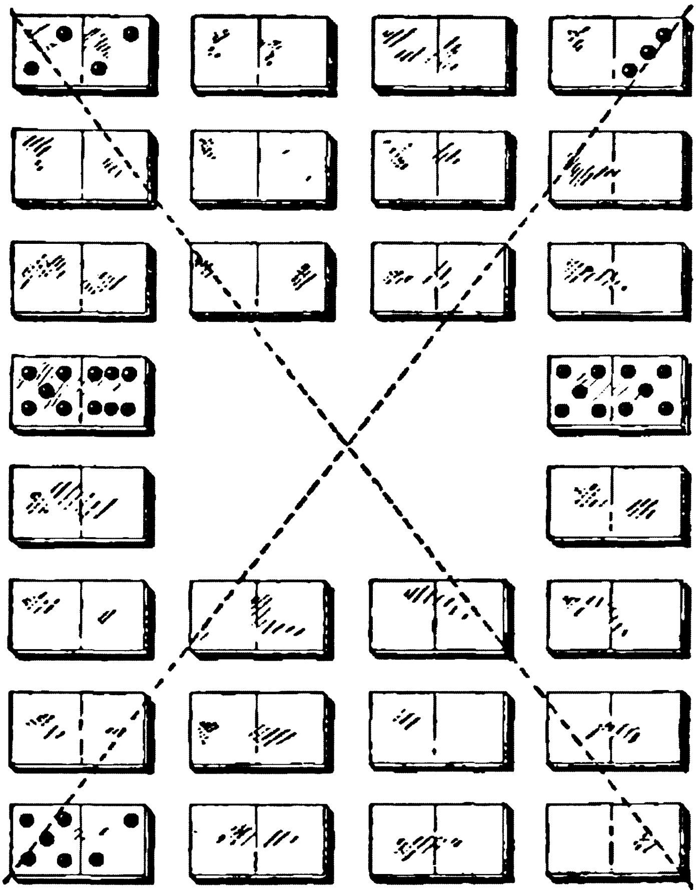


Рис. 132. Схема волшебного квадрата с отверстием

Задача 3. Подберите 16 костей домино с такими числами очков: 1, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 6, 6, 7, 7, 8, 8, 9 и 10 — и составьте из них волшебный квадрат.

Задача 4. Составьте волшебный квадрат с постоянной суммой, равной 27, из следующих 25 костей: 0–0, 0–1, 0–2, 1–1, 0–3, 1–2, 0–4, 2–2, 3–1, 3–2, 4–1, 5–0, 1–5, 6–0, 4–2, 3–3, 1–6, 3–4, 2–5, 2–6, 3–5, 4–4, 4–5, 6–3, 6–4.

181. Волшебный квадрат с отверстием

По схеме, показанной на рис. 132, из всех 28 костей выложите квадрат с прямоугольным отверстием в середине таким образом, чтобы сумма очков в каждом из *восьми* горизонтальных рядов, в каждом из *восьми* вертикальных рядов и вдоль каждой из двух диагоналей (указанных пунктиром) равнялась 21. Здесь, в отличие от предыдущих задач, каждая половинка кости домино имеет самостоятельное значение при подсчете очков по вертикалям и диагоналям.

На рис. 132 четвертый сверху горизонтальный ряд уже укомплектован полностью. Сумма очков 5 + 6 + 5 + 5 = 21. Показано также, какие кости следует положить по углам квадрата.

182. Умножение в домино

Посмотрите на рис. 133. При помощи четырех костей домино мы изобразили умножение трехзначного числа (числа 551) на однозначное (на 4), а именно: 551 × 4 = 2204. Попробуйте разместить все 28 костей домино так, чтобы получилось 7 «умножений», подобных показанному на рис. 133. Шесть «умножений» вы построите без особого труда. А вот над седьмым придется подумать. Все же это возможно.

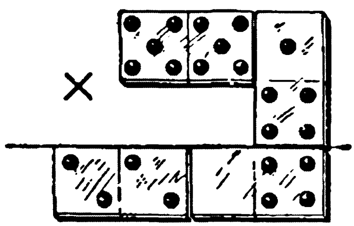


Рис. 133. Умножение

183. Отгадать задуманную кость домино

Предложите друзьям совместно, но тайно от вас, задумать какую-либо кость домино.

Пусть теперь они последовательно проделают следующие действия:

1) число очков одной половины (какой захотят) задуманной кости умножат на 2;

2) к произведению прибавят любое названное вами число m;

3) полученную сумму умножат на 5;

4) к произведению прибавят число очков второй половины задуманной кости.

Спросите у них окончательный результат, отнимите от него $5m$. Тогда две цифры получившегося двузначного числа и укажут вам числа очков на каждой из половин задуманной кости домино.

Предположим, например, что задумали кость 6–2. Умножили 6 на 2 и прибавили по вашему требованию $m = 3$. Получилось 15. Умножили 15 на 5 и прибавили 2 очка второй половины задуманной кости. Получилось 77. Отнимем $5m = 15$. Получаем: $77 - 15 = 62$. Задуманная кость домино: 6–2.

Почему так получается? Разберитесь!

Б. Кубик

Игральный кубик — это куб, на поверхности которого нанесены точки. На одной грани — одна точка, на другой — две точки, на третьей — 3, на остальных гранях — 4, 5 и 6 точек.

На рис. 134 показан такой игральный кубик и его выкройка.

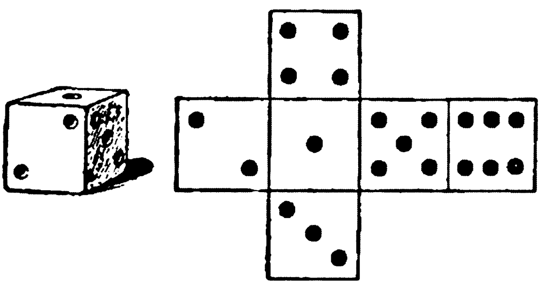


Рис. 134. Игральный кубик и его выкройка

Число точек на грани кубика определяет число очков. Размещены точки по поверхности кубика так, что *суммы очков на противоположных гранях равны* 7.

Почему именно кубик оказался многогранником, наиболее подходящим для игры?

Прежде всего, очевидно, что игральная кость должна быть *правильным* многогранником, так как только в этом случае при бросании игральной кости для каждой ее грани обеспечиваются *равные шансы* быть верхней. Но из пяти видов правильных многогранников наиболее подходящим будет, конечно, куб: изготовить его не составляет большого труда, и при бросании он довольно легко катится.

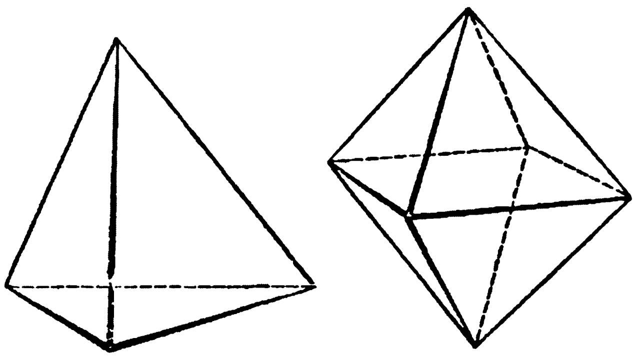


Рис. 135. Тетраэдр и октаэдр

Если все пять правильных многогранников бросить с одинаковым усилием, то тетраэдр и октаэдр (рис. 135) едва покатятся, куб (рис. 134) покатится лучше, а додекаэдр (рис. 136) и икосаэдр (рис. 137) настолько «круглы», что покатятся почти как шар.

Шесть граней куба навели на мысль использовать шесть первых натуральных чисел, а попарно параллельное расположение взаимно противоположных граней куба позволило просто, закономерно и в некотором смысле симметрично расположить эти числа (сумма чисел точек на каждой паре противоположных граней равна 7).

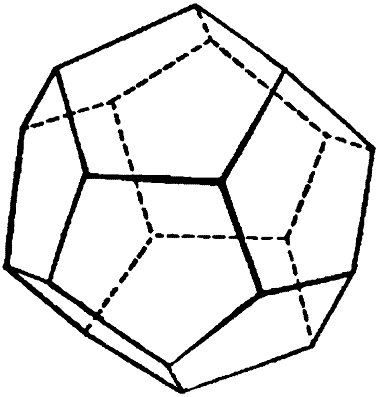


Рис. 136. Додекаэдр

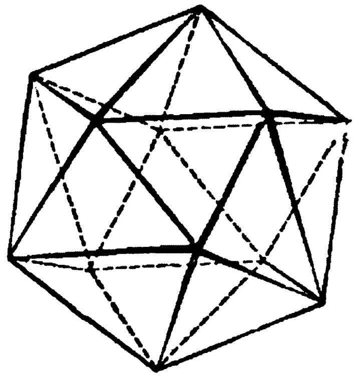


Рис. 137. Икосаэдр

Этот *принцип семи* и будет ключом к решению различных задач-фокусов с одним или несколькими игральными кубиками. Тем, кто еще не подметил эту особенность в расположении точек на поверхности кубика, будет нелегко разгадать секреты «угадываний», которые вы можете продемонстрировать.

184. Арифметический фокус с игральными кубиками

Для фокуса нужны три игральных кубика. Если у вас их нет, перерисуйте выкройку кубика, изображенную на рис. 134, на плотную бумагу или тонкий картон, аккуратно вырежьте и склейте.

«Факир» отворачивается; кто-нибудь из «публики» бросает на стол три кубика. «Факир» предлагает публике подсчитать сумму очков на верхних гранях всех трех кубиков, затем поднять какой-нибудь один из них и число очков на нижней грани этого кубика прибавить к предыдущей сумме. Далее «факир» предлагает снова прокатить тот кубик, который был поднят, и число очков его верхней грани сложить с ранее полученной суммой. После этого «факир» оборачивается, напоминает «публике», что он не знает, какой кубик был брошен вторично, берет в руки все три кубика, трясет их (для таинственности) и, к удивлению «публики», «угадывает» окончательный результат произведенных арифметических действий.

Метод «угадывания». Прежде чем взять кубики в руку, следует сложить очки на их верхних гранях и прибавить 7. Полученная сумма и будет той, которая должна быть «угадана».

Объясните почему.

185. Отгадывание суммы очков на скрытых гранях

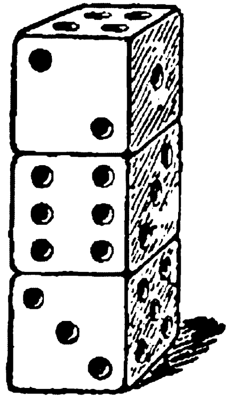


Рис. 138. Столбик из трех кубиков

Пусть три игральных кубика сложены столбиком (рис. 138). Взглянув только на верхнюю грань столбика или только на *две* его боковые грани, вы можете сразу определить сумму очков на гранях, по которым кубики соприкасаются, и на самой нижней грани. Например, в положении кубиков, изображенном на рис. 138, искомая сумма будет непременно равна 17.

Сообразите, каким правилом нужно руководствоваться, чтобы отгадать сумму скрытых очков.

186. В каком порядке расположены кубики?

Дайте друзьям три кубика, кусочек бумаги, карандаш и предложите им, расположив произвольно кубики в ряд, составить трехзначное число, цифры которого обозначили бы количества очков на верхней грани каждого кубика. Например, при расположении кубиков, изображенном на рис. 139, это будет 254. К этому числу пусть они припишут три цифры, обозначающие количества очков на соответствующих нижних гранях кубиков. Получится некоторое шестизначное число. В нашем примере 254 523. Полученное шестизначное число предложите разделить на 111 и сказать результат.

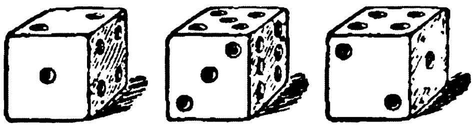


Рис. 139. Верхние грани образуют число 254

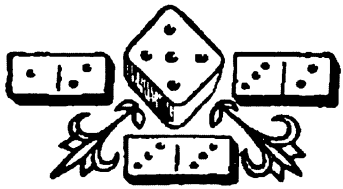
Не производя умножения, вы можете очень быстро определить первые три цифры этого шестизначного числа, а следовательно, сказать, в каком порядке были расположены кубики.

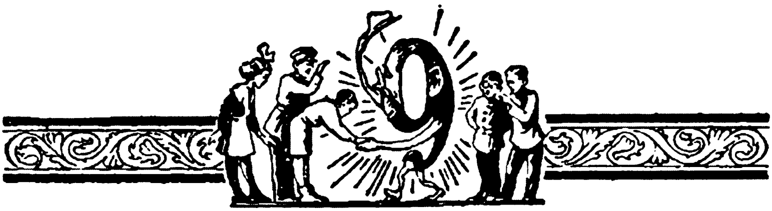
Метод угадывания. Вычесть 7 из объявленного частного и разность разделить на 9. Цифры получившегося частного и покажут первоначальное расположение кубиков.

Так, продолжая рассматривать пример, получим:

$$254\,523 : 111 = 2293;\ 2293 - 7 = 2286;\ 2286 : 9 = 254.$$

В чем математическая сущность этого фокуса?





Глава седьмая

СВОЙСТВА ДЕВЯТКИ

Некоторые особенности арифметических операций над целыми числами связаны с числом 9. Каждое подмеченное вами свойство девятки может послужить поводом к придумыванию разнообразных математических развлечений. Известен, например, признак делимости на 9: число делится на 9, если сумма его цифр делится на 9. Отсюда следует, что сумма цифр в произведении любого числа на 9 равна 9 или кратна 9 (то есть делится на 9). Например, $354 \times 9 = 3186$, тогда $3 + 1 + 8 + 6 =$ $= 18$ (делится на 9).

Поэтому, когда один малыш жаловался, что ему трудно запомнить таблицу умножения первых десяти чисел на *девять*, то отец предложил ему простой способ помочь памяти пальцами своих рук.

Вот этот способ в пользу и помощь другим.

Движением пальца. Положите обе руки рядом на стол и протяните пальцы. Каждый палец слева направо будет означать соответствующее порядковое число: первый слева — 1, второй — 2, третий — 3, четвертый — 4 и т. д. до десятого, который будет обозначать число 10. Пусть требуется умножить теперь любое число из первого десятка на 9. Для этого вам стоит только, не сдвигая рук со стола, приподнять вверх тот палец, который обозначает множимое. Тогда число остальных пальцев, лежащих налево от поднятого пальца, будет числом десятков произведения, а число пальцев направо — числом единиц.

Пример. Умножить 7 на 9. Кладите руки на стол и поднимите седьмой палец (рис. 140); налево от поднятого пальца лежит 6 пальцев, а направо — 3. Значит, результат умножения 7 на 9 равен 63. Это удивительное на первый взгляд механическое умножение тотчас же станет понятным, если вспомнить, что сумма цифр в каждом произведении чисел таблицы умножения на девять равна девяти, а число десятков в произведении всегда на 1 меньше того числа, которое мы умножаем на 9. Поднятием соответствующего пальца это мы и отмечаем, а следовательно, и... умножаем.

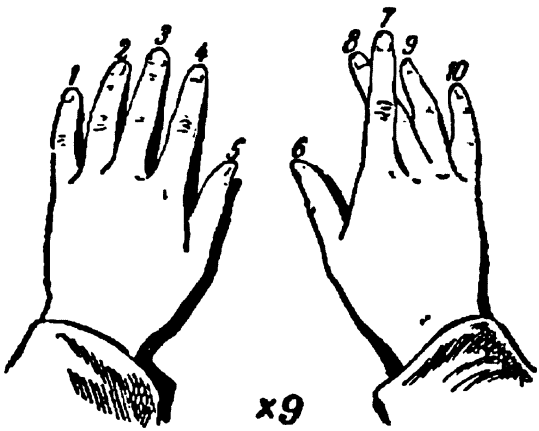


Рис. 140. «Счетная машина»

Человеческая рука — одна из первых счетных машин!

Еще некоторые свойства. Вот еще несколько интересных и полезных для дальнейшего свойств, связанных с числом 9.

1. Всегда делится на 9:

а) разность между любым числом и суммой его цифр;

б) разность двух чисел с одинаковыми цифрами, но разным порядком их расположения;

в) разность двух чисел с одинаковыми суммами цифр у каждого из них.

2. Если из каких-либо цифр составлены числа, отличающиеся только порядком следования цифр, то при делении на 9

каждого из них получается один и тот же остаток. Он равен остатку от деления на 9 суммы цифр какого-либо из упомянутых чисел.

3. Если остаток от деления суммы цифр числа на 9 будем называть «излишком», то:

а) излишек — суммы/разности чисел равен излишку суммы/разности излишков слагаемых;

б) излишек произведения двух чисел равен излишку произведения излишков данных чисел.

Вы легко проверите эти свойства на числовых примерах, а если знакомы с алгеброй, то можете их доказать.

В качестве самостоятельного упражнения найдите аналогичное соотношение для излишка частного от деления двух чисел.

Разобравшись в решении задач этой главы, вы можете многие из них использовать в качестве математических фокусов.

187. Какая цифра зачеркнута?

Задача 1. Пусть ваш друг напишет, не показывая вам, число из трех или более цифр, разделит его на 9 и назовет вам остаток от такого деления. Теперь предложите ему зачеркнуть во взятом им числе одну цифру (любую). Число, образовавшееся после зачеркивания цифры, пусть он опять разделит на 9 и снова назовет вам остаток от этого деления. Тотчас же вы можете сказать, какая цифра была зачеркнута, руководствуясь следующими правилами:

а) если второй остаток меньше первого, то, вычитая из первого остатка второй, вы получите как раз зачеркнутую цифру;

б) если второй остаток больше первого, то зачеркнутую цифру вы получите, вычитая второй остаток из первого, увеличенного на 9;

в) если остатки равны, то зачеркнута либо цифра 9, либо 0. Почему так?

Задача 2. Теперь предложите другу придумать два числа с одинаковыми цифрами, но разным порядком их расположения и вычесть из большего меньшее. Ни написанных чисел, ни полученной разности он вам, конечно, не должен говорить, но пусть он зачеркнет одну цифру разности (только не 0) и скажет вам сумму всех оставшихся цифр разности. Чтобы определить зачеркнутую цифру, вам достаточно дополнить названное им число до ближайшего, кратного 9.

Например:

$$72\,105 - 25\,071 = 47\,034.$$

Зачеркиваем цифру 3. Сумма оставшихся цифр: $4 + 7 + 4 = 15$. Дополнение числа 15 до ближайшего числа, делящегося на 9, то есть до 18, равно 3, что и дает зачеркнутую цифру.

Почему так?

Примечание. Задачу можно всячески разнообразить, основываясь на вышеуказанных свойствах девятки. Можно, например, предложить вычесть из данного числа сумму его цифр, зачеркнуть одну цифру разности (кроме 0 и 9) и по названной сумме оставшихся цифр разности отгадать зачеркнутую цифру таким же способом.

Задача 3. Напишем произвольное число, например 7146. Одну цифру вычеркнем, например 4. Из оставшегося числа (цифр в котором на одну меньше) вычтем сумму цифр *первоначально написанного числа* (18). В нашем примере получим: $716 - 18 = 698$. Результат оглашен.

Как, зная результат вычитания, узнать зачеркнутую цифру?

Задача 4. Напишите два или более числа с одинаковым количеством цифр. Я припишу еще столько же чисел и удалюсь, а вас попрошу зачеркнуть любую цифру, кроме нуля, и найти сумму оставшихся чисел. Если теперь вы мне скажете получившуюся сумму или хотя бы сумму цифр суммы, то я немедленно скажу вам, какая цифра зачеркнута.

Например:

$$\begin{array}{r l} \left.\begin{array}{r} 605 \\ 218 \end{array}\right\} & \textit{Числа, написанные вами} \\ \left.\begin{array}{r} \cancel{7}81 \\ 394 \end{array}\right\} & \textit{Числа, приписанные мною} \\ \hline 1298 & \end{array}$$

Сумма цифр суммы 1 + 2 + 9 + 8 = 20. Зачеркнуто 7.

Какие числа я должен приписать и как определить зачеркнутую цифру?

Задача 5. В предыдущей задаче рекомендовалось приписывать столько же чисел, сколько было написано задумавшим. Но при тех же условиях можно ограничиться приписыванием только одного числа.

Например:

$$\begin{array}{r l} \left.\begin{array}{r} 3521 \\ 40\cancel{8}6 \\ 7219 \end{array}\right\} & \textit{Числа, написанные вами} \\ 4272 \leftarrow & \textit{Число, приписанное мною} \\ \hline 19018 & \end{array}$$

Сумма цифр суммы 1 + 9 + 1 + 8 = 19. Зачеркнуто 8.

Какое число я должен приписывать в этом случае и как определить зачеркнутую цифру?

Задача 6. Ту же идею можно выразить в другом оформлении.

Предложите написать рядом несколько столбиков однозначных чисел, а вы припишите справа или слева — по желанию партнера — еще один столбец чисел так, чтобы каждое ваше число дополняло сумму чисел в строке до кратного 9. Теперь смело можете предложить партнеру вычеркнуть любую цифру, сложить оставшиеся числа по правилу сложения многозначных чисел, а по названной вам сумме цифр суммы, пользуясь известным уже правилом, вы легко определите зачеркнутую цифру.

Например:

Приписано мною — *Написано партнером*

$$\begin{array}{r} \downarrow\;\;\;\downarrow\;\; \\ 63\,\overline{216} \\ 44\,802 \\ 47\,\cancel{4}21 \\ 51\,921 \\ 95\,238 \\ \hline 302\,198 \end{array}$$

Сумма цифр суммы без девятки:

$$3 + 2 + 1 + 8 = 14; 18 - 14 = 4.$$

Зачеркнуто 4.

Интересно, что все приписывание своих чисел можно свести к однозначному числу, приписанному в любом месте. Догадайтесь как.

188. Скрытое свойство

Число 1313 запоминается легко, поэтому с ним удобно манипулировать тому, кто пожелает показать своим товарищам фокус с угадыванием зачеркнутой цифры.

Для этого предложите товарищам написать число 1313 и вычесть из него число, заданное вами. Для вычитания вы можете предложить любое число: одному участнику — одно, другому — другое. Затем пусть каждый из участников к получившемуся у него после вычитания числу припишет (имейте в виду: не прибавит, а припишет) справа или слева число, которое он вычитал, но *увеличенное* на 100 и в образовавшемся новом числе зачеркнет любую цифру, кроме нуля, а вам сообщит оставшиеся цифры. По этим цифрам вы легко определите цифру, зачеркнутую участником.

Какая особенность числа 1313, связанная со свойством девятки, помогает определить зачеркнутую цифру и как это сделать?

189. Еще несколько забавных способов отыскания отсутствующего числа

Задача 1. Из девяти цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9 я выбираю какие-то восемь и разбрасываю их произвольно по листу бумаги. Чтобы не показывать вам, какие цифры я выбрал, на рис. 141 они заменены кружками. В любом месте листа бумаги проведу прямую *AB* и назову ее «прямой итогов». Написанные цифры произвольно соединяю несколькими линиями, прямыми или кривыми — безразлично, но каждую цифру беру только по одному разу. На «прямой итогов» я запишу суммы цифр, расположенных вдоль каждой линии. Вам я покажу только те числа, которые образовались на «прямой итогов», или скажу сумму их цифр.

Числа, выписанные на «прямой итогов» на рис. 141, дают следующую сумму цифр: 1 + 4 + 1 + 4 + 1 + 2 = 13. Зная только это последнее число, определите, какая цифра не вошла в число первоначально выбранных.

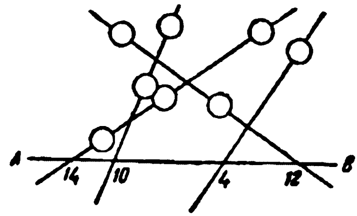


Рис. 141. Какая цифра не вошла в число выбранных?

Примечание. Вместо того, чтобы разбрасывать по бумаге выбранные цифры, я могу их произвольным образом расположить вдоль сторон заранее начерченного треугольника (рис. 142, *а*), или четырехугольника (рис. 142, *б*), или иного многоугольника и на «прямой итогов» записать суммы цифр, расположившихся вдоль каждой стороны начерченной фигуры.

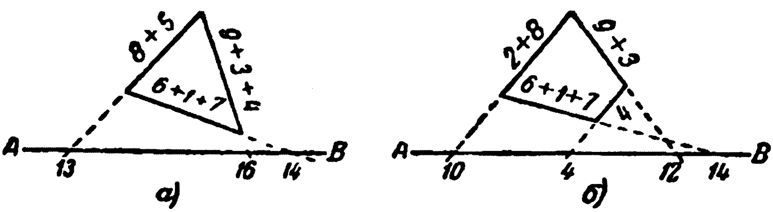


Рис. 142

Задача 2. Теперь я разбросаю по листу бумаги числа 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99. Опять проведу «прямую итогов» и все цифры, кроме одной — избранной, соединю несколькими линиями так, чтобы каждая принадлежала только одной линии. Чтобы не показывать вам, какую цифру я выбрал, на рис. 143 каждое число заменено прямоугольником с двумя отделениями, соответствующими цифрам этого числа. Выпишу на «прямой итогов» суммы цифр чисел, расположенных вдоль каждой линии, и попрошу вас опять-таки по этим суммам определить цифру, оставшуюся вне линий. Для тех, кто разобрался в предыдущей задаче, это нетрудно.

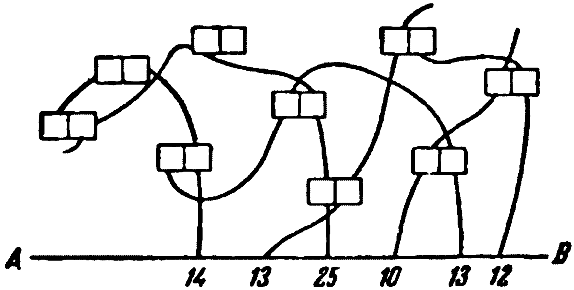


Рис. 143. Какую цифру я выбрал?

Задача 3. Напишите все порядковые числа от 1 до 8 и выберите любимое число. Остальные семь чисел произвольно расположите в две или более колонок. Сложите все числа, рассматривая их как многозначные, и сообщите мне сумму или сумму цифр суммы. Я быстро определю ваше любимое число. Как я это сделаю?

190. По одной цифре результата определить остальные три

Некоторое двузначное число с одинаковыми цифрами было умножено на 99. Легко понять, что в произведении должно получиться четырехзначное число, но сохранилась только третья цифра результата. Как, зная эту цифру, восстановить весь результат?

Допустим, сохранившаяся цифра — 5. Каков весь результат?

191. Отгадывание разности

Напишите, не сообщая мне, любое трехзначное число с неодинаковыми крайними цифрами (допустим, 621) и составьте новое число из тех же цифр, но расположенных в обратном порядке (для взятого примера — 126). Вычислите разность между этими числами, вычитая из большего меньшее (621 – 126 = 495), и назовите мне последнюю цифру разности (5), а я скажу весь полученный результат.

Каким образом?

192. Определение возраста

Переставьте цифры лет *A*, получите возраст *B*. Разность между возрастами *A* и *B* дает удвоенный возраст *C*, но *B* в 10 раз старше *C*. Определите возраст каждого.

193. В чем секрет?

Один из гостей нашей дружеской компании объявил нам, что берется, не раздумывая долго, написать любое количество чисел с нечетным числом цифр, каждое из которых будет обладать следующим удивительным свойством:

если сложить все цифры написанного им числа, а затем сложить все цифры получившейся суммы и так повторять до тех пор, пока сумма цифр не изобразится *одной* цифрой, то эта цифра непременно будет той же, что и *средняя* цифра исходного числа.

Тут же он нас просто забросал такими числами. Среди чисел были и трехзначные, например 435, и пятизначные, такие как 46 853, и даже тринадцатизначные, например 1 207 941 800 554. Он писал числа, содержащие такие цифры, которые мы требовали… И всякий раз объявленное им свойство цифр выполнялось.

Проверим это хотя бы на числах, приведенных в качестве примеров. Имеем:

$$4 + 3 + 5 = 12;\ 1 + 2 = 3;$$
$$4 + 6 + 8 + 5 + 3 = 26;\ 2 + 6 = 8;$$
$$1 + 2 + 7 + 9 + 4 + 1 + 8 + 5 + 5 + 4 = 46;\ 4 + 6 = 10;$$
$$1 + 0 = 1.$$

Действительно, окончательная сумма цифр всякий раз точно указывает среднюю цифру числа.

Оригинальное «дарование» гостя произвело на нас большое впечатление. Не мог же он, в самом деле, заучить такую массу чисел!

Мы пробовали сами наудачу писать аналогичные числа, но наши числа почему-то почти никогда не обладали указанным свойством.

В чем же секрет чисел нашего гостя?

Глава восьмая

С АЛГЕБРОЙ И БЕЗ НЕЕ

Вместе с развитием математики как науки совершенствовалось и искусство решения задач. Чисто арифметические приемы решения по мере развития буквенной символики постепенно уступали пальму первенства алгебре с ее аппаратом уравнений. Обозначение неизвестных чисел буквами с последующим установлением связей между неизвестными и известными числами, то есть составление уравнения задачи, оказалось действенным, общедоступным и единообразным методом решения разнотипных задач.

Решая задачу, мы всегда рассуждаем, но стремимся при этом составить наиболее короткую цепочку рассуждений. В одних случаях удобнее и проще вести рассуждения «от неизвестного к известному», завершая их составлением одного или нескольких уравнений (алгебраический путь). На этом пути для наиболее целесообразного выбора неизвестного, относительно которого составляется уравнение, следует учитывать характерные особенности условия каждой данной задачи. Чтобы впоследствии успешно решать трудные задачи, необходимо владеть алгебраическими приемами рассуждений. В других случаях, наоборот, естественнее решать задачу отдельными этапами, «от известного к неизвестному», конкретно истолковывая каждый этап решения (арифметический путь).

Оба указанных пути рассуждений как бы дополняют друг друга; на каждом из них могут возникнуть остроумные и изящные способы решения задач.

Приведу одну старинную задачу.

Как гусь с аистом задачу решали. Летела стая гусей, а навстречу им — один гусь. Он и говорит: «Здравствуйте, сто гусей!» Первый старый гусь ему отвечает: «Нет, нас не сто гусей! Вот, если б нас было столько, сколько есть, да еще столько, да еще пол столько, да еще четверть столько, да ты, гусь, то было бы сто гусей, а теперь… Вот и рассчитай-ка, сколько нас?»

Полетел одинокий гусь дальше и задумался. В самом деле, сколько же товарищей-гусей он встретил? Думал он, думал и, с какой стороны ни принимался, никак не мог эту задачу решить. Тут увидел гусь на берегу пруда аиста, ходит длинноногий и лягушек ищет. Аист — птица важная и пользуется среди других птиц славой математика: по целым часам иногда неподвижно на одной ноге стоит и все думает. Видно, задачи решает. Обрадовался гусь, слетел в пруд, подплыл к аисту и рассказал ему, как он стадо гусей встретил и какую ему вожак загадку задал, а он никак этой загадки решить не может.

Рис. 144. «…Теперь смотри, что я начерчу на песке»

— Гм!.. — откашлялся аист. — Попробуем решить. Только будь внимателен и старайся понять! Слышишь?

— Слушаю и постараюсь! — ответил гусь.

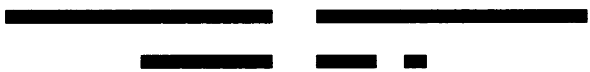
— Ну вот. Как тебе сказали? Если бы к встречным гусям прибавить еще столько, да еще полстолько, да четверть столько, да тебя, гуся, то было бы сто? Так?

— Так! — ответил гусь.

— Теперь смотри, — сказал аист. — Вот что я тебе начерчу здесь на песке.

Аист согнул шею и клювом провел черту, рядом такую же черту, потом половину такой же черты, затем четверть черты и еще маленькую черточку, почти точку.

Получилось следующее:



Гусь подплыл к самому берегу, вышел, переваливаясь, на песок, посмотрел на рисунок, но ничего не понял.

— Понимаешь? — спросил аист.

— Нет еще! — уныло ответил гусь.

— Эх, ты! Ну вот, смотри, как тебе сказали, — стадо, да еще стадо, да половина стада, да четверть стада, да ты, гусь, — так я и нарисовал: черту, да еще черту, да полчерты, да четверть этой черты, да еще маленькую черточку, то есть тебя. Понял?

— Понял! — обрадовался гусь.

— Если к встреченному тобой стаду прибавить еще стадо, да полстада, да четверть стада, да тебя, гуся, то сколько получится?

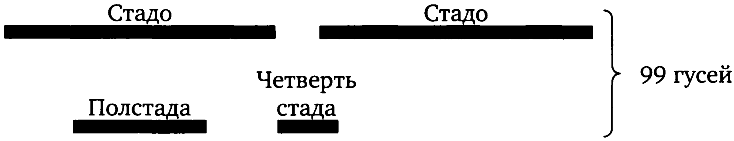
— Сто гусей!

— А без тебя сколько, значит, будет?

— Девяносто девять.

— Хорошо! Откинем на нашем чертеже точку, изображающую тебя, гуся, и обозначим, что остается 99 гусей.

Аист своим клювом изобразил на песке:



— Теперь смекни-ка, — продолжал аист, — полстада, сколько это будет четвертей?

Гусь задумался, посмотрел на линии на песке и сказал:

— Линия, изображающая полстада, вдвое больше, чем линия четверти стада, то есть в половине заключается две четверти.

— Молодец! — похвалил гуся аист. — Ну а в целом стаде сколько четвертей?

— Конечно, четыре! — ответил гусь.

— Так! Если теперь перевести на четверти одно стадо, да еще стадо, да полстада, да четверть стада, то сколько всего четвертей будет?

Гусь подумал и ответил:

— Стадо — это все равно что 4 четверти стада, да еще стадо — еще 4 четверти стада, всего 8 четвертей; да в половине стада 2 четверти: всего 10 четвертей; да еще четверть стада: всего 11 четвертей стада, и это составляет 99 гусей.

— Так! — снова подтвердил аист. — Теперь скажи, что же ты в конце концов получил?

— Я получил, — ответил гусь, — что в 11 четвертях встреченного мной стада заключается 99 гусей.

— А значит, в одной четверти стада сколько гусей?

Гусь поделил 99 на 11 и ответил:

— В четверти стада — 9 гусей.

— Ну а в целом стаде сколько?

— В целом заключается 4 четверти... Я встретил 36 гусей! — радостно воскликнул гусь.

— Вот то-то и оно! — важно промолвил аист. — Сам, небось, не мог дойти!.. Эх, ты... гусь!..

Эта задача очень коротко записывается и решается на языке алгебры. Примем четверть стада за x. Тогда целое стадо составляет $4x$, а полстада — $2x$. По условию имеем: $4x + 4x + 2x + x = 99$, или $11x = 99$, откуда $x = 99 : 11 = 9$, а $4x = 4 \times 9 = 36$. Стадо состояло из 36 гусей.

* * *

Решая последующие задачи, пользуйтесь любыми знакомыми вам приемами: арифметическими, алгебраическими, графическими и т. п. Ответы, приведенные в конце книги, дополняйте своими рассуждениями и решениями.

194. Бездельник и черт

Среди нас, людей сознательного и радостного труда, завелся Бездельник. И учиться ему лень, и от работы увиливает, а деньги любит, жаден. Никак в толк взять не хочет, что только те деньги хороши, которые честным трудом заработаны. Ходит без дела Бездельник и вздыхает:

— Эх, доля моя горемычная! Никто и знаться со мной не желает. Говорят: «Бездельники нам не нужны. Сам ничего не делаешь и нам мешаешь. Иди к черту!» Да разве какой черт посоветует мне, как богатым сделаться?

Только подумал это Бездельник, глядь, а черт перед ним стоит.

— Что ж, — говорит, — если хочешь, я тебе помогу. Работа легкая и богатым будешь. Вот видишь мост через речку?

— Вижу, — отвечает немного оробевший Бездельник.

— Ну, так перейди по мосту на другой берег, и у тебя будет вдвое больше денег, чем есть. Еще раз мост пройдешь, опять станет вдвое больше, чем было. И так каждый раз: как только ты пройдешь мост, у тебя будет ровно вдвое больше денег, чем было перед этим.

— Ой ли! — обрадовался Бездельник.

— Верное слово! — уверил черт. — Только, чур, уговор! За то, что я тебе устраиваю такое счастье, ты каждый раз, перейдя через мост, отдавай мне по 24 рубля за добрый совет.

— Ну, что же, — согласился Бездельник, — раз деньги будут удваиваться, так отчего же не дать тебе каждый раз по 24 рубля? Начнем, пожалуй!

Прошел мост Бездельник один раз, сосчитал деньги... Вот диво! Действительно, денег стало вдвое больше, чем было. Дал он черту 24 рубля и прошел мост второй раз. Опять стало денег вдвое больше, чем было перед этим. Отсчитал он 24 рубля, отдал черту и прошел по мосту в третий раз. Денег стало снова вдвое больше. Но только и оказалось их ровнехонько 24 рубля, которые по уговору полностью пришлось отдать черту. Черт захохотал и с глаз сгинул.

Остался Бездельник ни с чем. Видно, на чужой совет надо еще свой ум иметь!

Сколько же у Бездельника сначала денег в кармане было?

195. Смышленый малыш

Три брата получили 24 яблока, причем каждому досталось столько яблок, сколько ему было лет три года назад. Самый младший, мальчик очень смышленый, предложил братьям такой обмен яблоками:

— Я, — сказал он, — оставлю себе только половину имеющихся у меня яблок, а остальные разделю между вами поровну. После этого пусть средний брат тоже оставит себе половину, а остальные яблоки даст мне и старшему брату поровну, а затем и старший брат пусть оставит себе половину всех имеющихся у него яблок, а остальные разделит между мной и средним братом поровну.

Братья, не подозревая коварства в таком предложении, согласились удовлетворить желание младшего. В результате... у всех оказалось яблок поровну.

Сколько же лет было малышу и каждому из остальных братьев?

196. Охотники

Три охотника несколько дней провели в тайге.

В последний день охоты утром случилась неприятность: переходя вброд небольшую речушку, два охотника подмочили свои патронташи. Часть патронов оказалась непригодна к использованию. Три друга поровну поделили между собой сохранившиеся патроны.

После того как каждый охотник сделал четыре выстрела, у всех охотников вместе осталось столько патронов, сколько было после дележа у каждого.

Сколько всего пригодных патронов было в момент дележа?

197. Встречные поезда

Два товарных поезда, оба длиной по 250 м, идут навстречу друг другу с одинаковой скоростью 45 км/час.

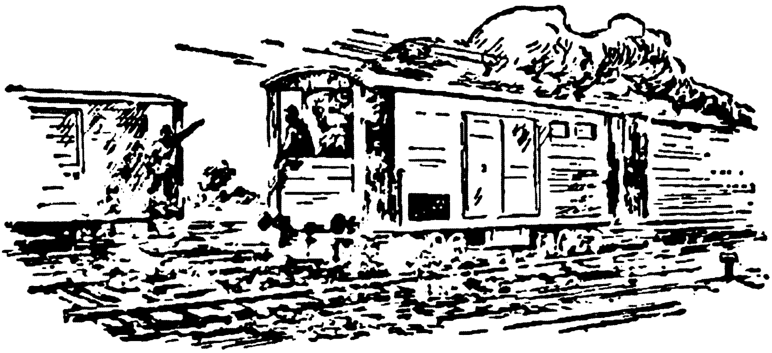


Рис. 145. Встреча кондукторов последних вагонов

Сколько секунд пройдет после того, как встретились машинисты, до того, как встретятся кондукторы последних вагонов (рис. 145)?

198. Вера печатает рукопись

Мама поручила Вере перепечатать рукопись.

— Буду печатать в среднем по 20 страниц в день, — решила Вера. Но первую половину рукописи она печатала лениво, только по 10 страниц в день. Зато вторую половину рукописи она печатала по 30 страниц в день.

— Вот и получилось в среднем по 20 страниц в день, — сделала вывод Вера.

— Ты неправильно считаешь, — сказала мама.

— Как неправильно? 10 + 30 = 40; 40 : 2 = 20. По первой половине рукописи я не допечатывала по 10 страниц в день, а по второй я печатала больше средней нормы на те же 10 страниц.

— Тем не менее, — настаивала мама, — в среднем ты печатала меньше 20 страниц в день. Подумай-ка еще как следует.

Убедительны ли доводы Веры? Что показывает ваш расчет?

199. История с грибами

Пятеро друзей — Маруся, Коля, Ваня, Андрюша и Петя, отдыхавшие в пионерском лагере, — пошли по грибы. Правда, грибами всерьез занялась одна Маруся, что же касается мальчиков, то они бóльшую часть времени провалялись на траве, рассказывая друг другу всякие небылицы.

В результате, когда собрались возвращаться в лагерь, оказалось, что у мальчиков корзины пустые, в то время как Маруся в своей корзине насчитала 45 грибов.

Рис. 146. Маруся отдала все свои грибы

— Неудобно вам, ребята, возвращаться в лагерь с пустыми корзинами, — посочувствовала Маруся и рассыпала по корзинам мальчиков все свои грибы (в своей корзине не оставила ни одного гриба).

Однако на обратном пути Коля и Андрюша натолкнулись на грибное место и дополнили свои корзинки, причем Коля нашел 2 гриба, а Андрюша удвоил количество имевшихся у него грибов. Ваня и Петя всю дорогу озорничали и растеряли часть своих грибов. Ваня потерял 2 штуки, а Петя потерял половину грибов, полученных от Маруси.

Самым удивительным оказалось то, что когда в лагере стали считать принесенные грибы, то у всех мальчиков оказалось грибов поровну. А когда ребята рассказали товарищам всю историю с грибами, то любителей математики заинтересовал вопрос: смогут ли они на основании этого рассказа подсчитать, сколько грибов получил каждый мальчик от Маруси? Как вы полагаете?

200. Кто вернется раньше?

Два спортсмена, тренируясь, одновременно начали лодочные гонки: один по реке, вниз и вверх по течению, а другой на такое же расстояние по озеру со стоячей водой, расположенному рядом с рекой. Допустим, что усилия обоих гребцов все время совершенно одинаковы. Который из них вернется раньше? Время, затрачиваемое на поворот, в расчет не принимается.

Примечание. Аналогичная задача впервые встретилась в практике воздухоплавания. Проводились авиационные состязания, по условиям которых летчики должны были облететь по периметру большое прямоугольное поле, отмеченное четырьмя столбами, причем столбы нужно было огибать при поворотах.

Возник вопрос: одинаковы ли условия полета при ветре и без него?

201. Пловец и шляпа

Пусть некто, выпрыгнув из лодки, уносимой течением реки, плывет некоторое время против течения, а затем поворачивает и догоняет лодку.

На что он затратил больше времени: на то, чтобы плыть против течения, или на то, чтобы догнать лодку? Или, может быть, оба этих временных отрезка равны?

Предполагается при этом, что мускульные усилия пловца все время одинаковы.

Какой ответ на поставленный вопрос подсказывает вам первоначальная догадка и подтверждается ли она последующими рассуждениями?

А правильный ответ таков: пловец догонял лодку по течению столько же времени, сколько времени он плыл первоначально против течения.

В самом деле, течение реки уносит вниз с одинаковой скоростью как лодку, так и пловца, то есть течение само по себе не влияет на расстояние между пловцом и лодкой, как будто бы его и нет вовсе. Отсюда и следует, что даже при наличии течения пловец приближается к лодке столько же времени, сколько времени он от нее удалялся.

* * *

Теперь представьте себе, что с моста, перекинутого через небольшую речку, спрыгнул спортсмен и поплыл против течения. Одновременно с головы одного из наблюдателей, стоявших на том же мосту, свалилась шляпа и поплыла по течению. Через 10 минут пловец повернул назад, и, когда вновь подплыл к мосту, его попросили, не останавливаясь, плыть дальше и догнать шляпу. Пловец догнал шляпу как раз под вторым мостом, который находился на расстоянии 1000 м от первого. Скорость пловца не известна, но известно, что он своих усилий не изменял на протяжении всего времени движения. Располагая только указанными данными, вы можете определить скорость течения реки. Сверяя свое решение этой задачи с тем, которое приведено в разделе ответов, обратите внимание на изложенный там второй способ решения.

202. Два теплохода

Два теплохода одновременно отчалили от пристани. Теплоход «Степан Разин» — вниз по течению, а «Тимирязев» — вверх.

Собственные их скорости одинаковы[1]. В момент отправления с теплохода «Степан Разин» упал спасательный круг, который поплыл по течению. Через час на обоих теплоходах по радио было получено распоряжение о перемене направления: идущему вниз повернуть вверх, а идущему вверх повернуть вниз. Успеет ли команда «Степана Разина» поднять плывущий по реке спасательный круг раньше, чем встретятся оба теплохода?

203. Два катера

Два катера двигаются вдоль большого озера, туда и обратно, не задерживаясь у берегов. Скорость каждого катера постоянна. Они одновременно покинули противоположные берега: катер M покинул берег A, а катер N — берег B, и встретились первый раз в 500 м от берега A. Возвращаясь, они встретились второй раз в 300 м от берега B.

По этим данным определите длину озера и отношение скоростей катеров. Смекалка поможет вам решить задачу в уме без сложных вычислений.

204. Во сколько раз больше?

Если от каждого из двух чисел отнять половину меньшего из них, то остаток от большего будет втрое больше остатка от меньшего.

Во сколько раз большее число больше меньшего?

205. Теплоход и гидросамолет

Теплоход отправился в дальний морской рейс. Когда он отошел от берега на расстояние 180 миль, за ним вылетел гидросамолет с экстренной почтой. Скорость гидросамолета в 10 раз больше скорости теплохода. На каком расстоянии от берега гидросамолет нагонит теплоход?

---

[1] Собственной скоростью называется скорость, которая была бы при той же затрате энергии в стоячей воде.

206. Велосипедисты на цирковой арене

Ареной служит огромная ровная площадка с четырьмя круговыми дорожками. Четыре велосипедиста готовят совместный цирковой номер. Каждый велосипедист движется по своему кругу (рис. 147). Начинают движение они одновременно, и каждый отправляется из той точки своей беговой дорожки, которая ближе всего к центру арены. Скорость движения каждого рассчитана математически точно и в условных единицах может быть выражена следующими числами:

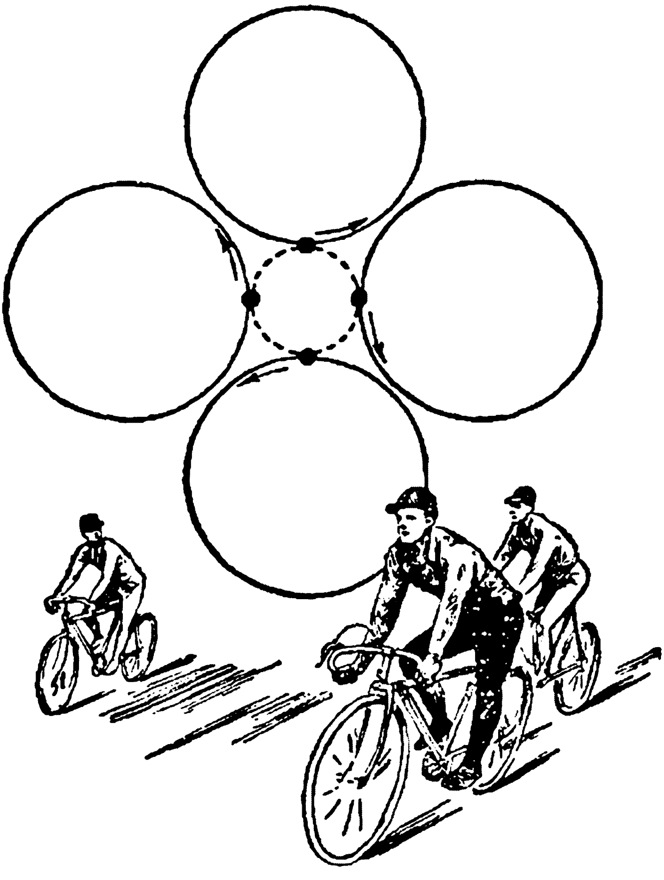


Рис. 147. Каждый велосипедист едет по своей дорожке

$$V_1 = 6\ \frac{\text{единиц}}{\text{час}},$$

$$V_2 = 9\ \frac{\text{единиц}}{\text{час}},$$

$$V_3 = 12\ \frac{\text{единиц}}{\text{час}},$$

$$V_4 = 15\ \frac{\text{единиц}}{\text{час}}.$$

Длина окружности каждого крута составляет $^1/_3$ условной единицы длины. Продолжительность выступления велосипедистов равна 20 минутам.

Будут ли велосипедисты на протяжении этих 20 минут еще один или несколько раз одновременно появляться в точках, из которых они начали движение?

207. Поездка Джека Лондона

В одном из рассказов Джека Лондона описывается, как он на санях, запряженных пятью собаками, спешил из Скагуэя к своему лагерю, где умирал его друг.

В этом рассказе есть несколько весьма любопытных подробностей, которые позволяют сделать из него интересную задачу.

В течение первых суток пути сани с собаками передвигались с полной, заранее намеченной Джеком Лондоном скоростью. По истечении суток две собаки порвали упряжку и убежали со стаей волков. Лондону пришлось продолжать путь на трех собаках, которые тянули сани со скоростью, равной первоначальной скорости. Вследствие этой задержки Лондон прибыл к месту назначения на двое суток позднее намеченного срока.

По этому поводу автор рассказа замечает: «Если бы две убежавшие собаки пробежали в упряжке еще 50 миль, я опоздал бы только на один день против намеченного срока».

Возникает вопрос: каково было расстояние от Скагуэя до лагеря? В рассказе об этом ничего не сказано, но приведенных данных достаточно, чтобы его определить.

208. Осторожнее с аналогиями

Некоторые умозаключения и даже целые открытия делаются по *аналогии*, в основе которой лежит предположение о сходстве двух предметов в одних признаках или свойствах на том основании, что эти же предметы сходны в других признаках.

Но аналогия ничего не доказывает. Она может только навести нас на мысль, правильность которой еще требует проверки, подтверждения.

Хорошо проведенная аналогия имеет место и в математике.

Ясно, что всякое обнаруженное сходство в математических действиях, в применении правил и т. д. облегчает решение задач, помогает мысли, однако же, наблюдая *сходные* свойства и признаки, не забывайте и о *различии* между ними.

Неудачные аналогии порождают неверные представления.

Бывает, спрашиваешь собеседника:

— На сколько единиц 40 больше, чем 32?

— На 8, — отвечает он без затруднений.

— А на сколько единиц 32 меньше, чем 40?

— Тоже, конечно, на 8.

— Правильно. Теперь прикиньте, на сколько процентов число 40 больше числа 32? Впрочем, не трудитесь! Я скажу, на сколько. Ровно на 25%. А вот на сколько процентов число 32 меньше числа 40 — нужно посчитать…

— Что ж тут считать, — перебивает собеседник, — вы же ведь сами только сейчас сказали, что 40 больше 32 на 25%, значит, и 32 меньше 40 тоже на 25%!

Приходится самым подробным образом разъяснять собеседнику его ошибку.

Разность действительно в обоих случаях одна и та же — 8. Но в первом случае мы ее относим к числу 32, принимаемому за 100%, а во втором случае — к числу 40, принимаемому за 100%; 8 от 40 составляет $^1/_5$, или 20%. Итак, 40 больше 32 на 25%, в то время как 32 меньше 40 на 20%.

Причина ошибки собеседника — в ложной аналогии.

Предложите-ка своим знакомым такие задачи.

Задача 1. Допустим, ваш ежемесячный заработок увеличился на 30%. На сколько процентов возросла ваша покупательная способность?

Задача 2. Пусть ваш ежемесячный заработок неизменен, но цены на товары снижены на 30%. На сколько процентов повысилась ваша покупательная способность в этом случае?

Задача 3. Букинистический магазин при продаже книги сделал скидку 10% с первоначально намеченной цены и при этом все же получил 8% прибыли. Сколько процентов прибыли предполагал первоначально получить магазин при продаже этой книги?

Задача 4. Если рабочий сократил время на изготовление детали на P%, то на сколько процентов увеличилась производительность его труда?

Ошибочные ответы на эти простые вопросы вы встретите не так уж редко, но... предварительно проверьте себя.

209. Юридический казус

Древние римляне мало проявили себя в математике. В области юридических наук они куда известнее. Дошедшие до нас древнеримские математические сочинения носят по преимуществу чисто практический, утилитарный характер.

Одним из поводов к возникновению арифметических задач служили римские законы о наследстве. Вот одна из таких старинных задач.

Некто, умирая, оставил жену в ожидании ребенка и сделал такое завещание: в случае рождения сына отдать ему $^2/_3$ оставленного имущества, а $^1/_3$ матери. В случае же рождения дочери она должна получить $^1/_3$, а мать $^2/_3$ имущества.

Вдова родила близнецов — мальчика и девочку. Такого события завещатель не предвидел.

Как разделить имущество между всеми тремя наследниками с наилучшим приближением к условиям завещания?

Математическое решение этой задачи зависит от юридического толкования воли завещателя. Одно из возможных юридических обоснований решения этой задачи дал римский юрист

Сальвиан Юлиан. Его решение приведено в ответе, но не торопитесь туда заглядывать.

Подумайте и предложите свое решение.

210. Парами и тройками

Я решил определить расстояние от своего дома до дома приятеля. Я шел равномерным шагом и полпути считал шаги парами, а полпути — тройками, причем пар получилось на 250 больше, чем троек.

Сколько шагов до дома моего приятеля?

211. Кто ехал на лошади?

Два человека — один на лошади, другой на машине — одновременно выехали из деревни в город. Один из них молодой, другой пожилой. Через некоторое время выяснилось, что если бы пожилой проехал расстояние, втрое большее, то осталось бы ему ехать вдвое меньше. Если бы молодой проехал расстояние, вдвое меньшее, то осталось бы ему ехать втрое больше.

Догадайтесь, кто из них ехал на лошади — пожилой или молодой?

212. Два мотоциклиста

Два мотоциклиста одновременно выехали из одного и того же места. Оба проделали одинаковое расстояние и вернулись домой в одно и то же время.

В пути мотоциклисты отдыхали. При этом известно, что один из них ехал вдвое больше времени, чем отдыхал другой; второй ехал втрое больше времени, чем отдыхал первый.

Кто из мотоциклистов ехал быстрее?

213. В каком самолете Володин папа?

— Скажи, папа, — обратился Володя с вопросом к своему отцу-летчику, — в каком из самолетов ты находился во время воздушного парада?

— Ты легко можешь вычислить это сам, — ответил отец, нарисовав девять самолетов (рис. 148).

Рис. 148. В каком самолете Володин папа?

— Число самолетов по правую сторону от меня, умноженное на число самолетов, находившихся по левую сторону от меня, давало в результате число, на три меньшее, чем было бы в том случае, если бы мой самолет находился на три места правее.

Володя подумал и показал на рисунке тот самолет, в котором находился его отец.

Как Володя нашел нужный самолет?

214. Раздробить на части

Раздробите 45 на четыре части так, что если к первой части прибавить 2, от второй отнять 2, третью умножить на 2, а четвертую разделить на 2, то все результаты будут равными.

Сумеете сделать?

215. Две свечи

Горят две свечи неодинаковой длины и разной толщины. Более длинная полностью сгорает за 3 $^1/_2$ часа, а короткая — за 5 часов.

Через 2 часа одновременного горения длины свечей оказались равными.

Во сколько раз одна свеча первоначально была короче другой?

216. Удивительная проницательность

На переменках учитель математики часто предлагает ребятам что-нибудь посчитать.

И вот что удивительно: иной раз он даже не знает, какие числа складывали или вычитали ребята, а глянет на результат и сразу скажет, у кого правильный ответ получился, а у кого — неправильный.

— Ну-ка, — скажет он, — задумайте какое-либо четырехзначное число, каждый свое. Задумали? Так... Теперь переставьте первую цифру в конец числа. У вас получилось еще одно четырехзначное число. Сложите оба эти числа. Например, 1234 + 2341 = 3575. А ну, скажите мне ваши результаты.

Коля: 8612,

Поля: 4322,

Толя: 9867,

Оля: 13 859.

— Все ошиблись, кроме Толи.

Проверили. Действительно так.

Как это определил Никаноров?

Ведь он же совсем не знал, какие числа были задуманы ребятами!

217. «Верное время»

В мастерскую «Верное время» принесли четверо часов: настенные, настольные, будильник и наручные.

Настенные часы по сравнению с сигналом точного времени отстают на 2 минуты в час. Настольные часы по сравнению с настенными идут вперед на 2 минуты в час. Будильник по сравнению с настольными отстает на 2 минуты в час. Наручные по сравнению с будильником идут вперед на 2 минуты в час.

В 12 часов все часы были поставлены по сигналу точного времени.

Который час покажут наручные часы в 19 часов в момент сигнала точного времени?

218. Часы

Беда с этими часами! В полдень 2 января и я и Вася поставили их точно. Через несколько дней снова проверили. Оказалось, что мои часы спешат немного, а Васины отстают. В пересчете на 1 час получилось, что мои часы спешат на одну секунду, а Васины отстают на $1\frac{1}{2}$ секунды в час. Мы заинтересовались такими вопросами: если не переводить стрелки наших часов, то:

1) Когда в следующий раз мои и Васины часы показали бы одно и то же время?

2) Когда в следующий раз они показали бы одновременно правильное время?

219. В котором часу?

Задача 1. Через некоторое время после полудня мастер пошел обедать. Уходя, он заметил положение стрелок на часах. Когда мастер вернулся, то обнаружил, что минутная и часовая стрелки поменялись местами.

В котором часу вернулся мастер?

Если вы разобрались в решении этой задачи, то вам не так уж трудно будет самостоятельно решить следующие две.

Задача 2. Я отсутствовал дома больше двух часов, но меньше трех. Когда я вернулся домой, то заметил, что за время моего отсутствия минутная и часовая стрелки настенных часов поменялись местами.

На сколько больше двух часов я отсутствовал?

Задача 3. Школьник начал решать задачу между 4 и 5 часами вечера, когда стрелки часов совпадали, а закончил тогда, когда минутная стрелка оказалась против часовой (по одной прямой).

Сколько минут решал задачу школьник и в котором часу он закончил решение?

220. В котором часу началось и закончилось совещание?

Совещание началось между 6 и 7 часами вечера, а окончилось между 9 и 10 часами вечера.

Определите *точно*, в котором часу началось и окончилось совещание, если минутная и часовая стрелки за время совещания поменялись местами.

221. Тренировка разведчиков

Командир разведчиков сержант Семочкин пользуется каждым удобным случаем, чтобы тренировать своих подчиненных в наблюдательности, смекалке и военной хитрости. То он неожиданно спросит:

— Сколько опор у моста, который мы переходили сегодня?

А то задачу предложит своим разведчикам для размышлений на досуге.

— Представьте себе, — скажет, например, Семочкин, — что два разведчика из нашего отряда направлены в один и тот же пункт. Оба они прошли одинаковый путь, но первый из них затратил на весь путь одно время, а второй — другое. Первый разведчик шел с какой-то определенной скоростью половину всего затраченного им *времени*. Второй разведчик с такой же скоростью шел половину *пути*. Вторую половину своего *времени* первый разведчик шел с *измененной* скоростью; с такой же измененной скоростью шел вторую половину *пути* второй разведчик.

Который из них скорее пришел к месту назначения?

Для решения этой задачи разведчики брали разнообразные числа в качестве пути и скорости как первоначальной, так и измененной, производили соответствующие вычисления и каждый раз приходили к одному и тому же результату: *первый разведчик меньше тратил времени на весь путь, чем второй.*

Те из разведчиков, которые решали задачу алгебраически, получали тот же ответ. Тем самым они *доказывали*, что в условиях задачи первый разведчик придет скорее второго независимо ни от расстояния, ни от численной величины их скоростей.

Сможете ли вы дать решение этой задачи словами, не используя математических построений?

222. По двум сообщениям

Сообщение первое:

— Поезд N прошел мимо меня в течение t_1 секунд.

Сообщение второе:

— Тот же поезд N прошел через мост длиной a метров в течение t_2 секунд.

Как по этим двум сообщениям определить длину и скорость поезда N в предположении, что скорость поезда неизменна?

223. Выбрать четыре слова

В этом столбике 14 слов. В каждом слове, начиная со второго, число букв на одну больше, чем в предыдущем. В последнем слове «самообразование» — 15 букв.

Из всех этих четырнадцати слов выберите четыре слова так, чтобы были справедливыми следующие два равенства:

$$a^2 = bd,\ ad = b^2c.$$

Через a, b, c и d здесь обозначены количества букв соответственно в первом, втором, третьем и четвертом словах, выбранных вами. Какие это слова?

УМ
КУБ
РОМБ
ОТВЕТ
ЗАДАЧА
АЛГЕБРА
ВЕЛИЧИНА
ГЕОМЕТРИЯ
МАТЕМАТИКА
РАЗМЫШЛЕНИЕ
ПЯТИУГОЛЬНИК
ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ
ДОКАЗАТЕЛЬСТВО
САМООБРАЗОВАНИЕ

224. Слон и комар

Один любитель математических развлечений, занимаясь как-то различными преобразованиями алгебраических выражений, пришел к странному выводу, что вес слона равен весу комара. Он рассуждал следующим образом.

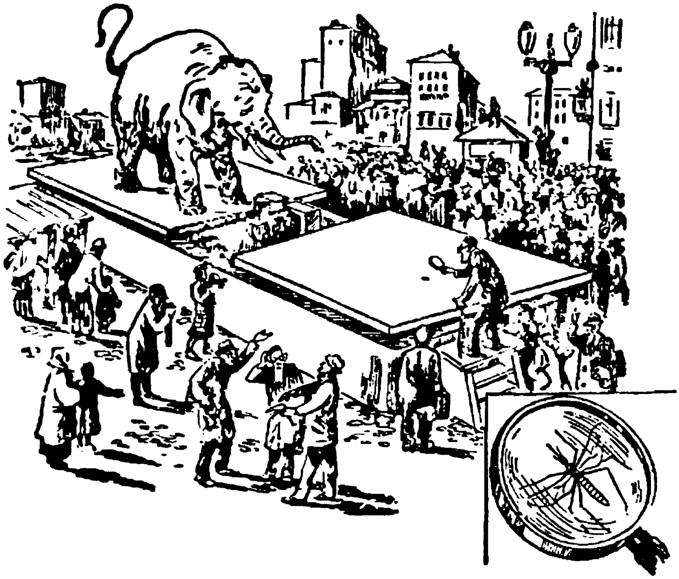


Рис. 149. Вес слона равен весу комара!

Пусть x — вес слона, а y — вес комара. Обозначим сумму этих весов через $2v$:

$$x + y = 2v.$$

Из этого равенства можно получить еще два:

$$x - 2v = -y, x = -y + 2v.$$

Перемножим почленно последние два равенства:

$$x^2 - 2vx = y^2 - 2vy.$$

Прибавив к обеим частям последнего равенства по v^2, получим:

$$x^2 - 2vx + v^2 = y^2 - 2vy + v^2 \text{ или } (x - v)^2 = (y - v)^2.$$

Извлекая квадратный корень из обеих частей последнего равенства, получим: $x - v = y - v$, или $x = y$, то есть вес слона (x) равен весу комара (y).

Разберитесь-ка, в чем тут дело.

225. Пятизначное число

Однажды мне встретилось интересное пятизначное число A. Приписывая единицу впереди этого числа, я получал, конечно, число шестизначное: [1] [A]; приписывая единицу в конце его, я тоже получал шестизначное число: [A] [1]; но второе шестизначное число оказывалось втрое больше первого: $\frac{[A]\,[1]}{[1]\,[A]} = 3$. Найдите это число A.

226. Лет до ста расти вам без старости

В одном случае задача привлекательна предельной четкостью и лаконичностью условия, в другом, наоборот, некоторой витиеватостью, запутанностью условия, похожего на тонкое узорчатое кружево.

Не хотите ли, например, установить соотношение между моим и вашим возрастом по следующему «узорчатому» условию?

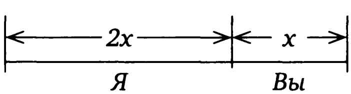
Сейчас мне и вам вместе 86 лет. Число моих лет составляет $^{15}/_{16}$ от возраста, который вы будете иметь тогда, когда мой возраст составит $^{9}/_{16}$ от того числа лет, которое вы имели бы, если бы дожили до такого возраста, который в два раза больше числа моих лет в тот момент, когда я могу быть вдвое вас старше.

Сколько лет мне и сколько вам?

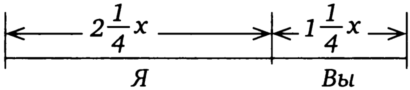
Решить эту задачу можно следующим довольно остроумным способом.

Решение. Всмотритесь в «кружево» условия задачи, и вы различите следующие «узоры», идущие от конца задачи к ее началу.

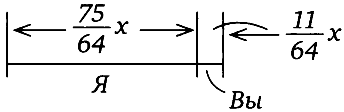
1. В какой-то момент времени я могу быть старше вас вдвое. Если в этот момент ваш возраст x, то мой — $2x$. Изобразим для наглядности это соотношение возрастов двумя отрезками, из которых один вдвое длиннее другого. Отсюда следует, что я старше вас на x лет, и эта разность в наших возрастах будет всегда.



2. В какой-то другой момент времени мой возраст составляет $^{9}/_{4}$ от вашего, каким он был в момент 1; отрезок, изображающий мой возраст, теперь должен быть длиной $2\frac{1}{4}x$, а ваш, как всегда, на x меньше, то есть $1\frac{1}{4}x$:



3. Сейчас число моих лет составляет $^{15}/_{16}$ от вашего возраста, каким он был в момент 2, то есть $\frac{15}{16} \times \frac{5}{4}x = \frac{75}{64}x$, а вам по-прежнему на x лет меньше: $\frac{75}{64}x - x = \frac{11}{64}x$:



Так как сейчас нам вместе 86 лет, то $\frac{75}{64}x + \frac{11}{64}x = 86$.

Отсюда $x = 64$. Следовательно, мне сейчас $\frac{75}{64} \times 64 = 75$ лет, а вам $\frac{11}{64} \times 64 = 11$ лет.

Так получается по задаче.

Еще одну аналогичную задачу решите самостоятельно.

Теперь мне вдвое больше лет, чем было вам тогда, когда мне было столько лет, сколько вам теперь. Когда вам будет столько лет, сколько мне теперь, то нам вместе будет 63 года. Сколько теперь лет каждому из нас?

227. Задача Люка́

Эту задачу придумал французский математик XIX века Эдуард Люка́. Его соотечественник математик Леза́н рассказывает следующую историю, ручаясь за ее достоверность.

На одном научном конгрессе в конце завтрака, на котором присутствовало много известных математиков из разных стран, Люка́ вдруг объявил, что хочет предложить всем присутствующим один из самых трудных вопросов.

— Я полагаю, — сказал Люка́, — что каждый день в полдень из Гавра в Нью-Йорк отправляется пароход и в тот же самый момент пароход той же компании отправляется из Нью-Йорка в Гавр. Переезд совершается ровно в 7 суток — как в том, так и в другом направлении. Сколько судов своей компании, идущих в противоположном направлении, встретит пароход, отправляющийся сегодня в полдень из Гавра?

Как вы ответили бы на вопрос Люка́? Подумайте о графическом способе решения этой задачи.

228. Путешествие на велосипедах

Два мальчика отправились на велосипедах в небольшое путешествие. В пути у одного из них велосипед сломался, и пришлось его оставить для починки. Несмотря на это, мальчики решили не прерывать своего путешествия и продолжать его отчасти пешком, отчасти на велосипеде следующим образом.

Отправляются одновременно оба: один на велосипеде, другой пешком. В известном месте велосипедист оставит велосипед и будет продолжать свой путь пешком. Его спутник, дойдя до условленного места, сядет на велосипед и в тот момент, когда догонит своего товарища, вновь уступит ему велосипед, сам же будет продолжать путь пешком.

На каком расстоянии от пункта назначения следует оставить велосипед в последний раз, чтобы оба мальчика одновременно достигли конечной цели путешествия, если от места аварии до цели им осталось 60 км? Пешком они передвигаются по 5 км, а на велосипеде — по 15 км в час.

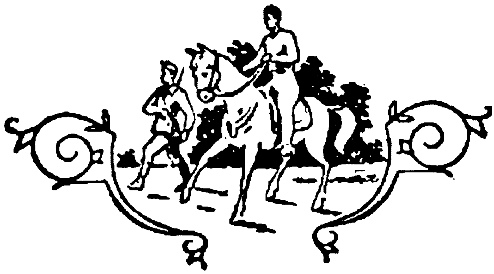
Был ли выгодным для мальчиков такой способ передвижения?

229. Одно свойство простых дробей

Напишите сколько хотите разных простых дробей, числители и знаменатели которых положительны.

Составьте новую дробь, числитель которой равнялся бы сумме всех числителей, а знаменатель — сумме всех знаменателей написанных вами дробей. Эта новая дробь обязательно окажется больше самой меньшей, но меньше самой большей из написанных вами дробей.

Проверьте это свойство на каком-нибудь примере и докажите его справедливость для любого числа любых положительных дробей.



Глава девятая

МАТЕМАТИКА ПОЧТИ БЕЗ ВЫЧИСЛЕНИЙ

Решение всякой задачи в той или иной мере опирается на рассуждения, но особую привлекательность имеют такие задачи, в которых основную, решающую роль играет правильное построение цепочки точных, иногда очень тонких рассуждений.

Некоторые из задач подобного рода будут скорее логическими, чем математическими, но и такие задачи развивают математическое мышление, учат думать, анализировать, заставляют искать нешаблонные пути решения.

230. В темной комнате

Я вошел в комнату, чтобы взять из шкафа свои ботинки и носки. В комнате спала сестра и было совсем темно. Я хорошо знал, в каком месте шкафа находятся мои три пары ботинок — все разных фасонов — и двенадцать пар носков — черных и коричневых. Мне не хотелось зажигать свет, чтобы не разбудить сестру.

Действительно, как ботинки, так и носки я обнаружил на своих местах, но, должен признаться, в беспорядке — просто груду из шести ботинок и кучу из двадцати четырех носков.

Сколько ботинок и сколько носков (самое меньшее) мне нужно вынести из темной комнаты на свет, чтобы обеспечить себя парой ботинок одного фасона и парой носков одного цвета? (При этом фасон обуви и цвет носков мне безразличны.)

231. Яблоки

В ящике перемешаны яблоки трех сортов. Каково наименьшее количество яблок, которое нужно наугад взять из ящика, не заглядывая в него, чтобы среди вынутых яблок оказались: 1) хотя бы два яблока одного сорта; 2) хотя бы три яблока одного сорта?

232. Прогноз погоды (шутка)

Если в полночь ночи идет дождь, то можно ли ожидать, что через 72 часа будет солнечная погода?

233. Посадка деревьев

Пятиклассникам и шестиклассникам нашей школы было поручено посадить деревья по обе стороны улицы по равному количеству на каждой стороне.

Чтобы не ударить лицом в грязь перед шестиклассниками, пятиклассники вышли на работу пораньше и успели посадить 5 деревьев, пока пришли старшие ребята, но оказалось, что они сажали деревья не на своей стороне.

Пришлось пятиклассникам идти на свою сторону и вновь начинать работу. Шестиклассники, конечно, справились с задачей раньше. Тогда учитель предложил:

— Пойдем, ребята, поможем пятиклассникам!

Все согласились. Перешли на другую сторону улицы, посадили 5 деревьев, отдали, значит, долг, да еще успели посадить 5 деревьев, и вся работа была закончена.

— Хоть вы пришли раньше нас, а все-таки мы вас обогнали, — посмеялся один шестиклассник, обращаясь к младшим ребятам.

— Подумаешь, обогнали! На 5 деревьев только, — возразил кто-то.

— Нет не на 5, а на 10, — зашумели шестиклассники. Спор разгорался. Одни настаивают на том, что на 5, другие пытаются как-то доказать, что на 10.

До истины, конечно, добрались, но спорили долго.

Кто же прав?

234. У кого какое имя?

— Ребята, в наш лагерь завтра утром приедут три еще незнакомых вам мальчика: Буров, Гриднев и Клименко, — сказал вожатый, обращаясь к группе сидевших на лужайке школьников из старшего отряда.

— Я могу сообщить имена этих мальчиков: Коля, Петя и Гриша.

— Но кто же из них Буров, кто Гриднев и кто Клименко?

— Давайте будем угадывать, — предложил кто-то из ребят.

— Я думаю, что Буров — это фамилия Коли, — раздался чей-то голос.

— Нет, ты не угадал, — ответил вожатый. — И совсем не нужно угадывать. Вы можете сами точно определить не только имена Бурова, Гриднева и Клименко, но даже и возраст каждого из этих мальчиков по тем немногим косвенным сведениям, которые я вам сейчас о них сообщу.

Предложение показалось заманчивым и было принято с удовольствием.

— К тому, что вы уже узнали о приезжающих мальчиках, я добавлю еще только следующие факты.

1) Отец Нади Серовой, которую вы хорошо знаете, — родной брат матери Бурова.

2) Петя пошел в школу в шесть лет и учится отлично. А в письме, которое я недавно получил, он пишет: «...Наконец-то в этом году я начну изучать алгебру, геометрию, физику...»

Добавлю еще, что начальник нашего лагеря Семен Захарович Мокроусов приходится Пете родным дедушкой и ждет своего внука с нетерпением.

3) Гриднев старше Пети на 1 год.

4) Гриша старше Пети на 1 год.

— Это все?

— Да.

— Но не маловато ли мы узнали о мальчиках? — посомневался кто-то.

— Вполне достаточно, чтобы решить поставленную задачу.

После непродолжительных споров, рассуждений и сопоставлений полученных фактов ребята нашли единственно возможное решение и точно определили имя и возраст своих новых товарищей: Бурова, Гриднева и Клименко.

235. Состязание в меткости

Три мальчика — Андрюша, Боря и Володя — стреляли из мелкокалиберных винтовок по специальной мишени, изображенной на рис. 150. Каждый из мальчиков сделал по 6 выстрелов. Места попаданий в мишень отмечены на рисунке точками. Когда подсчитали результаты, оказалось, что каждый из мальчиков выбил по 71 очку. При этом из всех 18 выстрелов только один дал попадание в центральный круг мишени (50 очков).

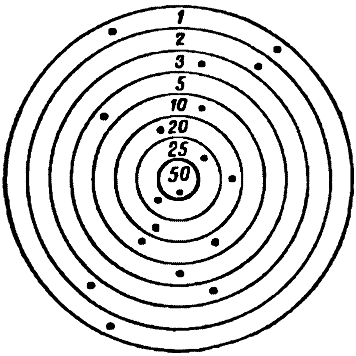


Рис. 150. Результаты состязания

Кому из мальчиков — Андрюше, Боре или Володе — принадлежал этот самый удачный выстрел, я забыл. Но вы это можете установить по следующим данным: первые 2 выстрела дали Андрюше 22 очка; первый выстрел Володи дал ему только 3 очка.

Кто же из мальчиков попал в яблочко?

236. Пассажиры одного поезда

В одном из вагонов поезда Москва—Одесса рядом сидели москвич, петербуржец, туляк, киевлянин, харьковчанин и одессит. Их фамилии начинались буквами *А*, *Б*, *В*, *Г*, *Д* и *Е*.

В дороге выяснилось, что *А* и москвич — врачи; *Д* и петербуржец — учителя, а туляк и *В* — инженеры. *Б* и *Е* — брюнеты, а туляк лысый. Харьковчанин старше *А*, одессит старше *В*. *Б* и москвич сошли в Киеве, а *В* и харьковчанин — в Виннице. Определите профессию и место жительства каждого из этих шести пассажиров.

Примечание. Не лишен интереса вопрос о необходимости и достаточности количества фактов, устанавливаемых условием этой задачи.

Может быть, заинтересуетесь этим небольшим исследованием?

237. Финал армейского турнира шахматистов

В финале армейского турнира шахматистов встретились представители восьми воинских званий: полковник, майор, капитан, лейтенант, прапорщик, сержант, ефрейтор и солдат. Все из разных родов войск: один пехотинец, другой летчик, затем танкист, разведчик, водитель, огнеметчик, сапер и связист.

Рассуждая правильно, вы сможете определить воинскую специальность каждого из 8 шахматистов по следующим данным.

В первом туре полковник играл с водителем. Летчик приехал только ко второму туру.

Во втором туре пехотинец играл с ефрейтором, а майор с прапорщиком. После второго тура капитан выбыл из турнира по болезни. Из-за этого из игры вышли:

в третьем туре сержант, в четвертом — танкист, в пятом — майор;

в третьем туре лейтенант выиграл у пехотинца, а партия полковника с разведчиком закончилась вничью;

в четвертом туре сапер выиграл у лейтенанта, а прапорщик — у полковника. Перед последним туром доигрывалась оставшаяся не оконченной в шестом туре партия водителя с огнеметчиком.

Замечания. 1) Для решения этой задачи не требуется умения играть в шахматы. Следует только знать, что в турнире один и тот же шахматист выходит из игры только один раз и с каждым партнером играет по одной партии.

2) На основании полученного решения задачи желающие могут даже составить полную таблицу распределения встреч по турам.

238. Заготовка дров

Осенью в деревне заготавливали дрова. Шесть ребят взялись за распиловку кругляка разной длины на полуметровые отрезки. Они разбились на три пары. Один из каждой пары считался старшим. Старших звали Володя, Петя и Вася. Володя с Мишей пилили двухметровые кругляки средней толщины. Петя с Костей — полутораметровые кругляки несколько большей толщины, чем двухметровые. Вася с Федей пилили метровые, очень толстые кругляки.

Когда работа была закончена, взрослые похвалили старших — Лаврова, Галкина и Медведева.

Лавров и Котов напилили 26 штук кругляков, Галкин и Пастухов — 27 штук, Медведев и Евдокимов — 28 штук.

Как зовут Пастухова?

239. Как фамилия машиниста?

В поезде Москва — Санкт-Петербург едут пассажиры Иванов, Петров и Сидоров. Такие же фамилии имеют машинист, начальник поезда и проводник поездной бригады. Известно, что:

1) пассажир Иванов живет в Москве;

2) проводник живет на полпути от Москвы до Санкт-Петербурга;

3) пассажир, однофамилец проводника, живет в Санкт-Петербурге;

4) тот пассажир, который живет ближе к месту жительства проводника, чем другие пассажиры, зарабатывает в месяц ровно втрое больше проводника;

5) пассажир Петров зарабатывает в месяц 2000 рублей;

6) Сидоров (из бригады) недавно выиграл у начальника поезда партию на бильярде.

Как фамилия машиниста?

240. Уголовная история

У учительницы одной из школ штата Нью-Йорк пропал кошелек. Украсть кошелек мог только кто-нибудь из пяти учеников: Лилиан, Джуди, Дэвид, Тео или Маргарет.

При опросе этих детей каждый из них дал по три показания:

Лилиан: 1) я не брала кошелек; 2) я никогда в своей жизни ничего не воровала; 3) это сделал Тео.

Джуди: 4) я не брала кошелек; 5) мой папа достаточно богат, и у меня есть собственный кошелек; 6) Маргарет знает, кто это сделал.

Дэвид: 7) я не брал кошелек; 8) с Маргарет я не был знаком до поступления в школу; 9) это сделал Тео.

Тео: 10) я не виновен; 11) это сделала Маргарет; 12) Лилиан лжет, утверждая, что я украл кошелек.

Маргарет: 13) я не брала кошелек учительницы; 14) в этом виновна Джуди; 15) Дэвид может поручиться за меня, так как знает меня со дня рождения.

При дальнейшем расспрашивании каждый из учеников признал, что из сделанных им трех заявлений два верных и одно неверное.

Определите, кто из учеников украл кошелек учительницы.

241. Скрытое деление

За столиком происходит молчаливое сражение двух юных шахматистов.

Рядом устроилась Оля — редактор школьной математической газеты «Думай!». Сейчас она придумывает задачу для очередного номера.

Покончив с делением семизначного числа на двузначное, Оля отложила лист с вычислениями в сторону и принялась за чертеж. Тогда сидевшие рядом шахматисты, не прерывая игры, начали одновременно развлекаться тем, что каждую шахматную фигуру, снятую с доски, ставили на цифры Олиного листа, не придерживаясь при этом какой-либо системы. К моменту окончания партии все цифры делимого, делителя, частного и всех промежуточных произведений и остатков, кроме самого последнего, равного единице, были закрыты шахматными фигурами.

— Оля, вот тебе и задача для газеты, — сказал один из шахматистов, — зарисуй или сфотографируй вот это «фигурное деление» и предложи читателям определить все цифры, скрытые под фигурами.

— А ведь в самом деле получается интересная задача, — обрадовалась Оля, — только подождите; давайте сначала подумаем — имеет ли она решение.

После непродолжительного размышления ребята пришли к заключению, что в таком виде задача еще не слишком подходит, так как допускает много различных решений, но если снять фигуру со средней цифры частного (эта цифра 8), то задача становится вполне определенной и имеет единственное решение.

По рис. 151 найдите делимое, делитель и частное.

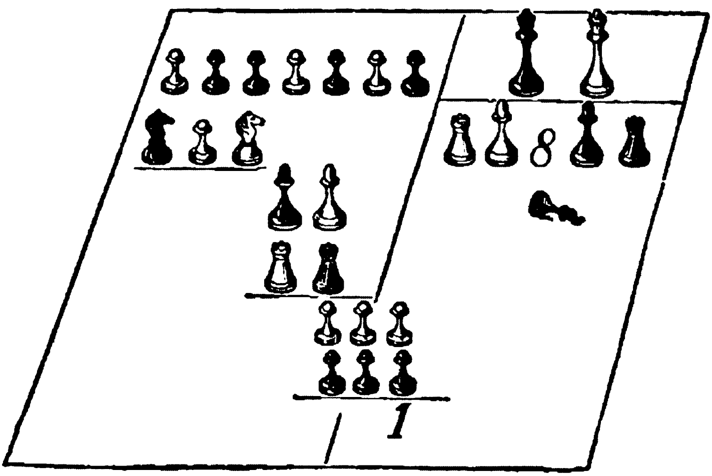


Рис. 151. Найдите делимое, делитель и частное

242. Зашифрованные действия (числовые ребусы)

Арифметические действия зашифрованы: цифры заменены буквами и звездочками. Одинаковыми буквами заменены одинаковые цифры, а разными буквами — неодинаковые цифры; звездочки же поставлены взамен всяких цифр — как одинаковых, так и неодинаковых. Каждый ребус может быть расшифрован путем точных и последовательных рассуждений. Восстановите цифры вместо букв и звездочек.

Первый ребус

```
     АВС
  ×  ВАС
  ------
    ****
     **А
   ***В
 -------
  ******
```

Второй ребус

```
     ***
  ×  *2*
  ------
     ***
   ****
    *8*
 -------
  **9*2*
```

Третий ребус

```
МУХА | ХА
ХА   |-----
---- | УХА
 КХ
 АР
----
 УХА
 УХА
----
   =
```

Четвертый ребус

```
**7********* | ****7*
******       |--------
-------      | **7**
****77*
*******
-------
  *7****
  *7****
 -------
  *******
  ****7**
 --------
     ******
     ******
     ------
       =
```

Пятый ребус

```
******4 | ***
 ***    |------
------  | *4**
 **4*
 ****
 ----
  ****
  *4*
 -----
   ****
   ****
   ----
    =
```

Шестой ребус. Этот ребус усложнен тем, что не известно даже число цифр делителя, и все же он имеет единственное решение.

Найдите его.

```
********** |    ?
***        |----------
----       | *****8**
 ***
 ***
 ----
  ***
  ***
  ----
     **
     **
     ---
      ***
      ***
      ---
       =
```

Седьмой ребус
(имеет четыре решения)

$$DO + RE = MI$$
$$FA + SI = LA$$
$$RE + SI + LA = SOL$$

Восьмой ребус
(имеет два решения)

$$\begin{array}{r} \text{ФУТ} \\ +\ \text{БОЛ} \\ \hline \text{ИГРА} \end{array},$$

где $\text{И} = 0$

Девятый ребус

$$\begin{array}{r} \text{АТОМ} \\ \times\ \text{АТОМ} \\ \hline ***** \\ ***** \\ ***** \\ ***** \\ \hline ****\text{АТОМ} \end{array}$$

243. Мотоциклист и верховой

На аэродром к прибытию самолета был выслан мотоциклист из почтового отделения. Самолет прибыл раньше установленного срока, и привезенная почта была направлена в почтовое отделение с верховым. Проехав полчаса, верховой встретил мотоциклиста, который принял почту, и, не задерживаясь, повернул обратно.

В почтовое отделение мотоциклист прибыл на 20 минут раньше, чем планировалось.

На сколько минут раньше установленного срока самолет прибыл на аэродром?

244. Пешком и на автомобиле

Тому, кто разобрался в решении предыдущей задачи, нетрудно будет найти решение и следующей задачи такого же рода.

Инженер, работающий за городом, ежедневно выходит из электрички в 8 часов 30 минут. Точно в это же время подъезжает к станции автомобиль и, не задерживаясь, отвозит инженера на завод.

Однажды инженер приехал на станцию в 8 часов и, не дожидаясь автомобиля, пошел к заводу пешком. Встретив на пути автомобиль, он сел в него и приехал на завод на 10 минут раньше обычного.

Определите, какое время показывали часы в момент встречи инженера с автомобилем и во сколько раз медленнее он идет пешком, чем едет на автомобиле.

245. «От противного»

Представьте себе, что имеются два утверждения *А* и *Б*, взаимно исключающие друг друга. Из них справедливо, конечно, только какое-нибудь одно. Предположим, требуется доказать справедливость утверждения *А*.

Вместо непосредственного, прямого доказательства справедливости утверждения *А* прибегают иногда к косвенному доказательству, то есть доказывают, что противоположное утверждение *Б* несправедливо, так как приводит к противоречию с достоверными фактами. Этот метод рассуждений, называемый «доказательством от противного», широко применяется в геометрии, в школьном курсе алгебры, иногда в арифметике. Однако его с успехом можно использовать не только для доказательства теорем, но и для решения задач.

Рассмотрим применение метода рассуждений «от противного» на примере такой задачи.

Сумма двух чисел 75. Первое из них на 15 больше второго. Способом рассуждения «от противного» доказать, что второе число равно 30.

Решение. Предположим, что второе число не равно 30, тогда оно либо больше 30, либо меньше 30. Однако если второе число больше 30, то первое больше 45 и сумма их больше 75, что противоречит условию. Если же второе число меньше 30, то первое меньше 45 и сумма их меньше 75, что также противоречит условию.

Следовательно, второе число равно 30.

Следующие две задачи решите рассуждением «от противного».

Задача 1. Произведение двух целых чисел больше 75. Докажите, что хотя бы один из сомножителей больше 8.

Задача 2. Произведение некоторого двузначного числа на 5 тоже двузначное число. Докажите, что первая цифра данного множимого будет 1.

246. Обнаружить фальшивую монету

Вряд ли в действительности может возникнуть необходимость искать среди одинаковых монет фальшивую при помощи взвешиваний на чашечных весах без гирь, но ради тренировки своей мысли примем эти условия как исходные для решения следующих трех задач «на рассуждения».

Первая задача (легкая). Имеется 9 монет одинакового достоинства. Известно, что у 8 из них одинаковый вес, а одна — фальшивая — немного легче остальных. Требуется при помощи *двух* взвешиваний на чашечных весах без гирь определить фальшивую монету.

Вторая задача (потруднее). При тех же условиях определить фальшивую (более легкую) монету из 8 одинаковых монет тоже при помощи только *двух* взвешиваний.

Третья задача (трудная). Среди 12 монет имеется одна фальшивая. Известно, что фальшивая монета отличается по весу от настоящих, но не известно, легче она настоящих или тяжелее. Настоящие монеты все одного веса. С помощью не более *трех* взвешиваний на чашечных весах без гирь нужно определить фальшивую монету и одновременно установить, легче она или тяжелее остальных.

* * *

Задачи для самостоятельного решения (без ответов).

Задача 1. Изготовлено 13 деталей. Все они одного фасона и должны иметь одинаковый вес. Но возможно, что в этой партии есть *одна* деталь (не более чем *одна*), отличающаяся от остальных по весу.

Тремя взвешиваниями на чашечных весах нужно определить, имеется ли в данной партии нестандартная деталь, и если да, то легче она стандарта или тяжелее. Гирь нет, но есть одна дополнительная (четырнадцатая) деталь стандартного веса, которую разрешается ставить на весы.

Задача 2. Обобщим предыдущую задачу. Условия те же, но число контролируемых деталей равно $\frac{3^n - 1}{2}$, а на весах разрешается произвести n взвешиваний ($n = 1, 2, 3\ldots$).

247. Логическая ничья

На конкурсе любителей задач и головоломок особенно отличились три человека. Чтобы выделить из них победителя, решили провести еще одно испытание. Показали им пять бумажек: три белые и две черные. Затем всем троим завязали глаза и каждому наклеили на лоб по белой бумажке, а черные бумажки уничтожили. После этого повязки сняли и объявили, что победителем будет тот, кто первым определит цвет своей бумажки. Никто из соревнующихся не мог видеть цвета своей бумажки, но видел белые бумажки у своих товарищей. После некоторого размышления все трое одновременно пришли к заключению, что у каждого из них *белая* бумажка. Как они рассуждали?

248. Три мудреца

Утомившись от споров и летнего зноя, три древнегреческих философа прилегли немного отдохнуть под древом сада Академии и уснули. Пока они спали, шутники испачкали углем их лбы. Проснувшись и взглянув друг на друга, все пришли в веселое настроение и начали смеяться, но это никого не тревожило, так как каждому казалось естественным, что двое других смеются друг над другом.

Внезапно один из мудрецов перестал смеяться, так как сообразил, что его собственный лоб тоже испачкан.

Как он рассуждал?

249. Пять вопросов для школьников

Чисто математическая формулировка должна быть достаточно полной, но без ненужных слов. Краткость и точность математического языка — его отличительная и в то же время красивая черта.

1. Найдите ненужные слова в следующих знакомых вам математических предложениях:

а) Сумма двух острых углов прямоугольного треугольника равна 90°.

б) Если катет прямоугольного треугольника равен половине гипотенузы, то противолежащий ему острый угол содержит 30°.

2. Используя соответствующие математические термины, упростите следующие фразы:

а) Часть секущей, заключенная внутри окружности.

б) Многоугольник с наименьшим числом сторон.

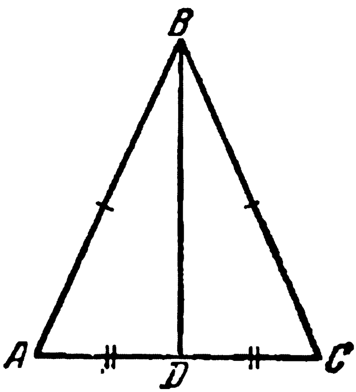


Рис. 152

в) Хорда, которая проходит через центр окружности.

г) Равнобедренный треугольник, основание которого равно боковой стороне.

д) Две окружности неравных радиусов, имеющие общий центр.

3. В треугольнике ABC (рис. 152) $AB = BC$, $AD = DC$. Найдите не менее пяти терминов, характеризующих отрезок BD.

4. Вот семь родственных терминов: параллелограмм, геометрический образ, квадрат, многоугольник, плоская фигура, ромб, выпуклый четырехугольник. Расположите эти слова последовательно так, чтобы понятие, обозначенное предыдущим словом, включало в себя понятие, обозначенное последующим словом.

5. Зная, что сумма всех внешних углов любого выпуклого многоугольника равна четырем прямым углам, сообразите, какое наибольшее число внутренних *острых* углов может встретиться в выпуклом многоугольнике.

250. Рассуждения вместо уравнения

Каждому человеку, сколько-нибудь изучавшему математику, знакомы те или иные приемы арифметики или, может быть, алгебры и других разделов математики, при помощи которых он и решает математическую задачу.

Есть, конечно, задачи совершенно непосильные человеку, не владеющему хотя бы алгеброй, но есть, естественно, и такие, перед которыми не следует отступать даже и тому, кто не умеет составлять и решать уравнения. Ведь может еще помочь самый обыкновенный здравый смысл, наблюдательность, рассудительность. Это — тоже законные приемы решения задач. Вот и решите-ка «по соображению» следующие две задачи.

Задача 1. Если некоторое двузначное число прочесть справа налево, то полученное «обращенное» число будет в $4\,{}^{1}/_{2}$ раза больше данного. Что это за число?

В условии задачи данных немного, но, искусно их используя, можно решить эту задачу одними «рассуждениями» примерно так:

а) искомое число больше 10, так как оно двузначное;

б) но оно меньше 25, так как $25 \times 4\,{}^{1}/_{2}$ — число трехзначное;

в) искомое число четное, так как при умножении его на $4\,{}^{1}/_{2}$ получается число целое;

г) обращенное число по условию в 9 раз больше половины данного числа, значит, обращенное число кратно 9;

д) так как обращенное число кратно 9, то сумма его цифр делится на 9, а данное число состоит из тех же цифр, что и обращенное, значит, и оно кратно 9.

Найдите продолжение этих рассуждений и закончите решение задачи.

Задача 2. Произведение четырех последовательных целых чисел равно 3024. Найдите эти числа.

Для «логического» решения этой задачи можно предложить следующую схему рассуждений:

а) установить, что среди искомых чисел нет числа 10;

б) среди искомых чисел должны быть числа меньше 10;

в) из пунктов а) и б) и из условия задачи вывести, что все искомые числа меньше 10, то есть однозначны;

г) установить, что среди искомых чисел нет числа 5;

д) разбить все остальные однозначные числа на две группы в соответствии с условием задачи и выяснить, какая группа удовлетворяет условиям задачи.

251. Алгебра и арифметика

Галя Карпова, студентка педагогического института, готовится к пробному уроку по алгебре в восьмом классе средней школы.

— Покажи-ка мне, Галя, какие задачи ты надумала предложить своим ученикам, — поинтересовался Галин отец.

«Возраст ребенка, увеличенный на 3 года, дает число, из которого точно извлекается квадратный корень, и если действительно извлечь корень из этого числа, то получится возраст ребенка, уменьшенный на 3 года.

Сколько лет ребенку?»

— Ну что ж, неплохая задача для устных упражнений. Смекалистые ребята решат ее в одну минуту.

— Как для устных упражнений? Как в одну минуту? На этой задаче я предполагала еще раз показать ученикам преимущество алгебраического способа решения задачи — при помощи составления уравнения — перед арифметическим.

— В таком случае эта задача не очень-то годится. Всякий, кто вникнет в смысл твоей задачи, решит ее в уме почти без всяких вычислений.

Как решил задачу отец Гали?

Дополнительный вопрос для тех, кто умеет составлять и решать квадратные уравнения: как арифметически и алгебраически предполагала Галя решить эту задачу?

252. Да или нет

Представьте себе, что ваш друг задумал некоторое целое число в промежутке от 1 до 1000. Чтобы угадать задуманное число, вы будете задавать вопросы. Условимся далее, что на все вопросы ваш друг будет отвечать только «да» или «нет».

Может показаться невероятным, что достаточно всего лишь десяти вопросов, чтобы наверняка отгадать любое задуманное целое число в промежутке от 1 до 1000. Однако это так.

Сообразите, какие вопросы нужно задавать.

Глава десятая

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИГРЫ И ФОКУСЫ

А. Игры

Есть игры, успешное проведение которых зависит не от случайного стечения благоприятных обстоятельств, а от собственной смекалки и предварительного расчета. Тот, кто умеет произвести расчет, лежащий в основе игры, становится обладателем «секрета» игры, обеспечивающего ему победу над партнерами, еще не овладевшими ее математической основой. Такие игры приобретают свойства задач. В то же время элементы игры присущи почти всякой задаче из области математических развлечений.

253. Одиннадцать предметов

На столе — 11 одинаковых предметов, например спичек. Первый играющий берет себе из этого количества по своему усмотрению 1, 2 или 3 предмета, затем второй играющий берет себе из числа оставшихся предметов также по своему усмотрению 1, 2 или 3. Потом опять берет первый и т. д. Так поочередно оба играющих берут каждый раз не более чем по 3 предмета. *Проигрывает* тот, которому приходится взять *последний* предмет. Может ли начинающий игру поставить своего партнера перед необходимостью взять последний предмет?

Как нужно вести игру, чтобы выиграть в тех случаях, когда начальное число предметов 30?

Обобщение игры. Двое поочередно берут спички со стола.

Как нужно вести игру, чтобы вынудить партнера взять последнюю спичку, если первоначально на столе лежит n спичек, а за один раз разрешается взять от 1 до p спичек (p значительно меньше n)?

254. Взять спички последним

Изменим основное условие предыдущей игры. Пусть теперь игрок, взявший спички последним, не проигрывает, а выигрывает игру.

Играют двое и берут поочередно, каждый по своему усмотрению, любое количество спичек в пределах от 1 до 6.

Как нужно вести игру, чтобы взять спички последним, если первоначально на столе лежит 30 спичек?

255. Побеждает чет

Из 27 спичек, лежащих на столе, двое играющих поочередно отнимают не менее 1 и не более 4 спичек. Выигравшим считается тот, у кого по окончании игры окажется *четное* количество спичек.

Как выиграть?

256. «Цзяньшицзы»

«Цзяньшицзы» — китайская народная игра. Буквальный перевод слова «цзяньшицзы» — «выбирание камней».

Играют двое. Положив на землю *две кучки* камней, играющие поочередно берут камни из этих кучек, соблюдая следующие правила:

а) из одной кучки можно брать любое количество камней (даже сразу всю кучку);

б) можно брать камни одновременно из двух кучек, но непременно по *одинаковому* количеству из каждой.

Выигрывает тот, кто, соблюдая эти правила, возьмет последний камень.

Камни, разумеется, можно заменить любыми другими предметами.

Игра «Цзяньшицзы» представляет собой дальнейшее развитие и расширение только что описанных игр со спичками. В «Цзяньшицзы» не ограничивается первоначальное количество предметов, раскладываются они на две кучки и игроку разрешается брать количество предметов, не предопределяемое заранее.

Математический интерес игры — в построении ее теории, то есть в отыскании и обосновании такого способа ведения игры, который обеспечивал бы выигрыш партии определенному игроку.

Ясно, например, что в положениях (1, 0), что значит: в одной кучке 1 камень, в другой — 0 камней, и (n, n), что значит: обе кучки содержат по одинаковому количеству камней, — выиграет игру тот, кто делает очередной ход. Он сразу возьмет все камни (в первом случае на основании пункта а), во втором — на основании пункта б) правил).

В положении (1, 2) игрок, делающий очередной ход, проигрывает. В этом легко убедиться, составив таблицу всех случаев продолжения игры от положения (1, 2):

Число камней	Играют		Число камней	Играют		Число камней	Играют		Число камней	Играют	
	А	Б		А	Б		А	Б		А	Б
1	0	0	1	1	0	1	1	0	1	0	0
2	2	0	2	0	0	2	1	0	2	1	0

В первом столбце таблицы указано число камней в каждой кучке. Цифры под *А* и *Б* указывают, сколько камней *осталось* в кучках после очередного хода (игрок *А* ходит первым).

Итак, сочетание камней (1, 2) приносит поражение игроку, делающему очередной ход. Обозначим это сочетание, как «НП» («начинающий проигрывает»).

Продолжаем исследование. Если в первой кучке 1 камень, а во второй не меньше 3 камней, то игрок *А*, начинающий игру, обязательно выиграет: он возьмет из второй кучки все камни за исключением двух; это приведет к положению (1, 2), то есть к такому соотношению камней, при котором игрок *Б*, делающий очередной ход, проигрывает.

Отсюда следует, что положение $(1, n)$ будет сочетанием «НП» только для $n = 2$; во всех остальных случаях оно будет сочетанием «НВ» — «начинающий выигрывает».

Игрок, желающий одержать победу, должен руководствоваться таким принципом: своим ходом свести соотношение камней в кучках к сочетанию «НП».

Какие же еще соотношения камней, кроме (1, 2), будут сочетаниями «НП»?

Рассмотрите подробно все случаи продолжения игры в положении $(2, n)$ для $n > 1$, затем в положении $(3, n)$ и т. д., и вы, несомненно, найдете еще целый ряд сочетаний «НП», знание которых обязательно для достижения победы в игре «Цзяньшицзы».

Далее можете попытаться обнаружить закономерность в последовательности сочетаний «НП» и вообще собственными усилиями завершить математическую теорию игры «Цзяньшицзы», но это, разумеется, нелегкая и серьезная задача.

257. Как выиграть?

Играют двое. Игровое поле — полоска бумаги, разделенная на 8 клеток. В клетках *d*, *f* и *h* помещены шашки (рис. 153). Играющие поочередно передвигают произвольно выбранную шашку из данных трех на *любую* клетку в направлении, указанном стрелкой. Шашка может быть передвинута и через другую шашку и поставлена на клетку, занятую другой шашкой.

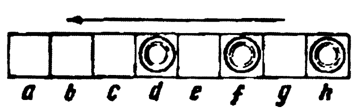


Рис. 153. Поле для игры

Выигрывает тот, кто последним поставит шашку на клетку *a*. Тот, кто в этой игре делает первый ход, *всегда* может выиграть, если предварительно разработает систему правильных ходов. Разработку системы ходов, обеспечивающих победу, а также доказательство высказанного утверждения, оставляю для самостоятельных изысканий.

258. Выложить квадрат

Эта игра — маленький конструктор. Двое играющих должны иметь по 18 картонных плоских фигур (рис. 154). Цвет фигур одного комплекта должен отличаться от цвета фигур другого комплекта.

Поле для игры представляет собой квадрат из 36 клеток, объединенных в 9 квадратных секций по 4 клетки в каждой (рис. 155). Размер фигур определяется размером клеток игрового поля.

Комбинируя данные фигуры, можно выложить из них несколько квадратов таких же размеров, как секции игрового поля (то есть в 4 клетки). Разумеется, каждый игрок может выложить не больше 4 квадратов, так как располагает для этого только 18 фигурами, общая площадь которых $17\frac{1}{2}$ клеток.

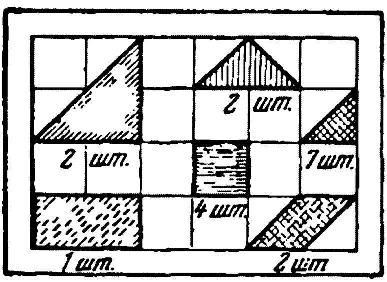


Рис. 154. Фигуры для игры

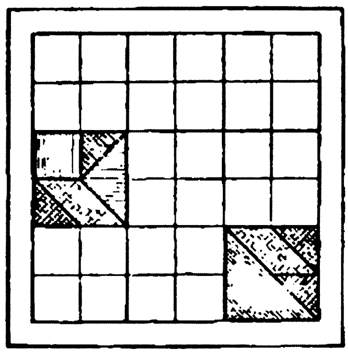


Рис. 155. Поле для игры

Выкладываются квадраты на игровом поле поочередными ходами. Каждый ход состоит в том, что игрок кладет одну из принадлежащих ему фигур на любую свободную клетку секции, еще не занятой партнером, но при этом он не должен занимать своими фигурами больше 4 секций.

Переставлять фигуру с одной клетки игрового поля на другую, менять ее положение или перемещать из одной секции в другую не разрешается.

Смысл игры заключается в том, чтобы продуманно использовать свои фигуры для составления наибольшего числа квадратов.

Игра заканчивается тогда, когда ни один из партнеров не может выложить требуемый квадрат из оставшихся фигур своего комплекта.

Выигрывает тот, кто больше другого выложит квадратов.

Возможные расположения фигур показаны для примера на рис. 155.

259. Кто первый скажет «сто»?

Играют двое. Первый участник игры называет произвольное целое число, *не превышающее* 10, то есть он может называть 10 и всякое меньшее число. Второй игрок прибавляет к названному числу свое целое число, тоже не превышающее 10, и сообщает сумму. К этой сумме первый прибавляет какое-либо целое число, опять-таки не превышающее 10, и сообщает новую сумму. К новой сумме второй прибавляет число, не большее десяти, и т. д. до тех пор, пока окончательной суммой не окажется 100.

Первый может назвать, например, 7, второй 12, первый 22 и т. д.

Выигрывает тот, кто первый достигнет 100.

Как добиться победы?

После того как найдете ключ к победе, обдумайте план ведения игры в других условиях, например с предельным слагаемым, равным не 10, а какому-нибудь другому числу, и с предельной суммой, равной не 100, а иному наперед назначенному числу.

260. Игра в квадраты

Полем игры служит заранее вычерченная на бумаге в клетку прямоугольная фигура, состоящая из некоторого числа (лучше нечетного) квадратных клеток. Размер и очертание фигуры безразличны.

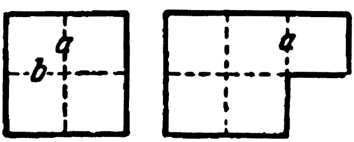
Двое играющих поочередно обводят карандашом или ручкой стороны внутренних клеток (за каждый ход обводится по одной стороне). Те стороны внутренних клеток, которые лежат на границе игрового поля, обводить не требуется — они считаются уже построенными. Тот, кто обведет последнюю сторону клетки, считает ее своей, отмечает эту клетку каким-нибудь значком и обязательно делает еще один ход не в очередь, то есть проводит новую черту. Вследствие этого можно подряд «взять» несколько клеток.

Игру выигрывает тот, кто наибольшее число раз завершил обвод квадратных клеток, то есть «взял» клеток больше, чем партнер. «Качество» выигрыша определяется разностью между числом взятых и числом отданных клеток.

Теория этой игры гораздо сложнее, чем может показаться на первый взгляд. Если игровое поле состоит из большого числа клеток, то возможных комбинаций получается так много, что заранее их изучить, а тем более запомнить почти невозможно.

Ограничимся рассмотрением лишь нескольких простейших случаев, таких, для которых исход игры может быть заранее рассчитан. Знание этих элементов теории даст вам преимущество перед противником.

1) Всякий квадрат из четырех клеток (рис. 156, *а*) полностью проигрывает тот, кто его начинает. В самом деле, если игрок, делающий ход, обведет любую сторону какого-либо внутреннего квадрата, например сторону *a*, то его противник, обводя *b*, возьмет одну клетку, а затем, имея право хода, заберет и остальные три клетки.



а)   б)

Рис. 156

2) Если в границах фигуры-поля содержится 5 клеток (рис. 156, *б*), то при правильном начальном ходе можно проиграть только 3 клетки (1 взять, 4 отдать); при ошибочном ходе проигрываются все 5 клеток. Чтобы взять 1 клетку и отдать противнику остальные 4 клетки, нужно начальным ходом обвести сторону *a*.

При всяком другом начальном ходе противник последовательно заберет все 5 клеток.

3) Прямоугольник из 6 клеток полностью выигрывает тот, кто первым ходом обведет сторону *a* (рис. 157).

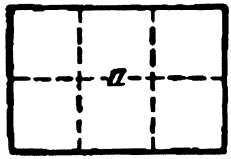


Рис. 157

4) «Канал» шириной в одну клетку — прямолинейный, ломаный, разомкнутый или сомкнутый, но без отверстий внутри (рис. 158), полностью выигрывает тот, кто первым «входит» в эту фигуру. Если же сомкнутый канал огибает отверстие (например, уже взятую клетку), то «входить» в него первым невыгодно — любой ход ведет к проигрышу всех клеток (рис. 159).

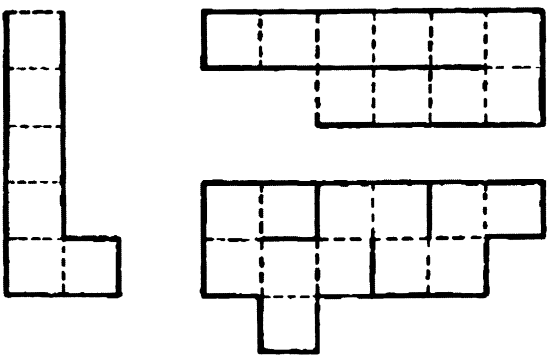


Рис. 158. Эти фигуры выигрывает тот, кто первым «войдет» в них

5) При входе в прямоугольник, состоящий из 8 клеток (рис. 160), может быть розыгрыш (ничья), если первым ходом будет обведена сторона *a* или a^1. Всякое иное начало ведет к проигрышу.

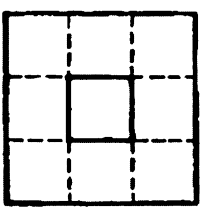


Рис. 159

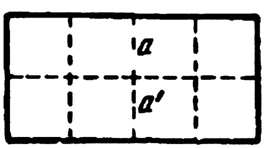


Рис. 160

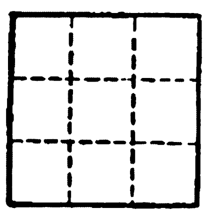


Рис. 161

Из приведенных примеров видно, что искусство игры заключается в том, чтобы обдуманными ходами умело разбить первоначальную данную фигуру на простые фигуры рассмотренного типа, заставить противника начинать те из них, которые ведут к проигрышу, а самому вовремя начинать те, которые дают безусловный выигрыш. При этом, конечно, нужно постоянно следить за числом взятых клеток.

Задача. При входе в квадрат, состоящий из 9 клеток (рис. 161), можно выиграть не меньше 7 клеток (8 клеток взять и 1 отдать). Определите, с обвода какой стороны следует начать игру в этом случае, и разберите возможные варианты продолжений. Для контроля загляните в ответ.

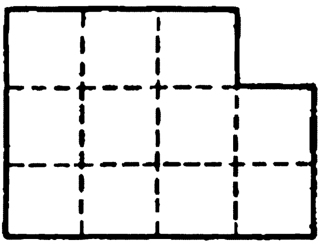


Рис. 162. Постройте план игры на этом поле

Постройте самостоятельно план игры на поле в форме многоугольника, состоящего из 11 клеток, изображенного на рис. 162. Должен ли начинающий безусловно выиграть или проиграть и сколько клеток самое меньшее?

261. «Оуа»

«Оуа» — народная игра жителей западной Африки. Игра проводится на доске, разделенной на 12 отделений. Во всех отделениях выдолблено по лунке, и в каждую лунку в начале игры помещено по 4 одинаковых шарика (рис. 163). Африканские ребята часто просто выкапывают 12 лунок в земле и играют камушками, которых всего 48.

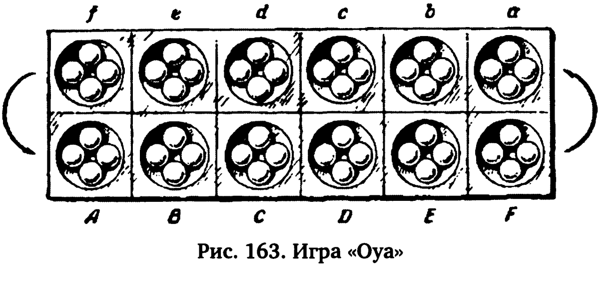


Рис. 163. Игра «Оуа»

Играют двое. Один игрок (назовем его P) садится со стороны AF, другой (назовем его p) — со стороны af.

Ход состоит в том, что игрок вынимает все шарики из какой-либо лунки *на своей стороне* и раскладывает их по одному в каждую из последующих лунок. Порядок следования лунок: против движения часовой стрелки ($ABCDEFabcdef$). Если, например, игрок P, делая свой первый ход, вынет шарики из лунки D, то он должен разложить их по одному в каждую из лунок E, F, a, b. Игрок p может ответить, например, освобождением лунки a (которая после хода P содержит 5 шариков) и распределением их по лункам b, c, d, e, f. В результате этих ходов получится такая позиция:

$$\begin{array}{cccccc} f & e & d & c & b & a \\ \hline 5 & 5 & 5 & 5 & 6 & 0 \\ 4 & 4 & 4 & 0 & 5 & 5 \\ \hline A & B & C & D & E & F \end{array}$$

Если в ходе игры из лунки вынимается 12 и более шариков, то при круговом обходе, дойдя до этой лунки, *следует ее пропустить*, то есть оставить пустой.

Если при распределении по лункам *последний* шарик опущен в *последнюю* лунку (f — на одной стороне и F — на другой) *на стороне противника*, после чего в этой лунке оказалось 2 или 3 шарика, то игрок, сделавший такой ход, забирает шарики из этой лунки в качестве «добычи». Он последовательно забирает себе шарики и из *предшествующих* лунок на стороне противника, если в них также оказалось 2 или 3 шарика, но не далее той лунки, в которой число шариков не 2 и не 3.

Поясню последнее правило примерами.

Пример 1. В позиции

$$\begin{array}{cccccc} f & e & d & c & b & a \\ \hline 2 & 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ \hline A & B & C & D & E & F \end{array} \tag{1}$$

игрок P делает ход с лунки F (другого хода у него нет). Позиция становится такой:

$$
\begin{array}{cccccc}
f & e & d & c & b & a \\
\hline
3 & 2 & 3 & 4 & 2 & 3 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
A & B & C & D & E & F
\end{array}
\tag{2}
$$

Последний шарик игрока P вошел в f. Лунка f на стороне противника содержит теперь 3 шарика. Игроку P это дает право на «добычу». Он берет себе 3 шарика из лунки f плюс 2 и 3 из лунок e и d. В лунках b и a также оказалось 2 и 3 шарика, но игрок P не должен брать эти шарики, так как последовательность лунок f, e, d с подходящим числом шариков в каждой лунке *прервана* лункой c, в которой шариков оказалось не 2 и не 3. Итак, ход P принес ему выигрыш в 8 шариков.

Между прочим, в получившейся позиции (2) игрок p, если он хочет, чтобы игра продолжалась, не должен играть с лунки a или b, ибо тогда игрок P не будет иметь шариков на своей стороне, и игра прекращается.

Пример 2. В позиции

$$
\begin{array}{cccccc}
f & e & d & c & b & a \\
\hline
0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 7 & 7 \\
\hline
A & B & C & D & E & F
\end{array}
$$

игрок P, делая ход с лунки F, ничего не выигрывает, так как его последний шарик ложится на его же стороне доски. Делая ход с E, он также ничего не выигрывает, так как хотя его последний шарик и ложится в лунку f, но в ней не получается после этого хода двух или трех шариков.

Пример 3. Пустая лунка не всегда обеспечивает безопасность позиции. В позиции

$$
\begin{array}{cccccc}
f & e & d & c & b & a \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 17 \\
\hline
A & B & C & D & E & F
\end{array}
$$

все лунки на стороне игрока p пустые, и все же игрок P выигрывает 12 шариков. Он начинает с лунки F, что приводит к позиции:

$$\begin{array}{cccccc} f & e & d & c & b & a \\ \hline 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ \hline A & B & C & D & E & F \end{array}$$

Последний шарик падает в f, и игрок P берет все 12 шариков из лунок на стороне игрока p.

Игра прекращается только в двух случаях:

1) если игроки согласились, что оставшихся на доске шариков недостаточно, чтобы образовать позицию, дающую «добычу»;

2) если игрок не имеет шариков на своей стороне, чтобы сделать ход.

Победителем считается тот игрок, у которого к концу партии больше выигранных шариков[1].

Эта игра, подобно шахматам, требует расчета на несколько ходов вперед.

262. «Математико» (итальянская игра)

Для игры нарежьте из картона или плотной бумаги 52 небольшие карточки. На каждой из них напишите по одному числу: на четырех карточках по 1, на следующих четырех по 2, затем на четырех по 3 и т. д. Последним написанным числом, очевидно, будет 13.

[1] Если игра прекратилась по первой причине, то оставшиеся на доске шарики при окончательном подсчете очков не учитываются. Если же игра прекратилась по второй причине, то по предварительному соглашению оставшиеся на доске шарики либо также не учитываются, либо передаются игроку, оставившему противника без шариков на его стороне, либо, наоборот, в качестве компенсации передаются тому игроку, который лишился возможности сделать очередной ход.

Количество играющих не ограничено.

Каждый играющий берет себе листочек бумаги с 25 клетками в форме квадрата (5 × 5) и карандаш. Один из играющих (ведущий) берет колоду приготовленных карточек с числами, растасовывает ее, затем открывает первую карточку и объявляет написанное на ней число. Каждый из играющих записывает это число в одну из клеток на своем листке бумаги. (После того как число вписано, перемещать его в другую клетку запрещается.) Затем ведущий объявляет число, написанное на следующей карточке, играющие опять вписывают его в любую из свободных клеток своего листа и т. д.

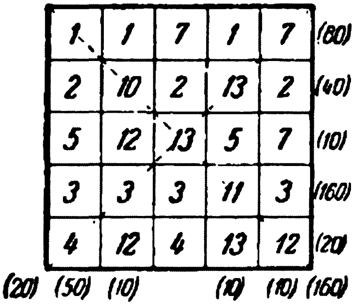


Рис. 164. Подсчет очков

Игра прекращается, когда будут заполнены все 25 клеток. Тогда записи каждого участника оцениваются некоторым числом очков, зависящим от способа размещения чисел в клетках квадрата. Победителем будет считаться тот, у кого окажется больше очков.

Подсчет очков производится по следующей таблице:

Комбинация чисел	В ряду или в столбце	По диагонали
За 2 одинаковых числа..........	10 очков	20 очков
За 2 пары одинаковых чисел.....	20 очков	30 очков
За 3 одинаковых числа..........	40 очков	50 очков
За 3 одинаковых числа и 2 других одинаковых числа	80 очков	90 очков
За 4 одинаковых числа..........	160 очков	170 очков
За 5 последовательных чисел, но не обязательно по порядку расположенных	50 очков	60 очков
За 3 раза по 1 и 2 раза по 13.....	100 очков	110 очков

Комбинация чисел	В ряду или в столбце	По диагонали
За числа 1, 13, 12, 11 и 10, но не обязательно по порядку расположенных	150 очков	160 очков
За 4 единицы	200 очков	210 очков

На рис. 164 показано примерное заполнение клеток и сделан подсчет числа очков.

263. Игра в волшебные квадраты

Эта игра способна послужить развлечением для одного человека, но в ней может участвовать и соревноваться друг с другом любое число желающих.

Каждый играющий берет листочек бумаги и вычерчивает квадрат, состоящий из 16, или 25, или 36 и т. д. равных клеток (о количестве клеток играющие договариваются заблаговременно). Для каждого тура игры заранее намечается набор целых чисел, каждое из которых *необходимо употребить хотя бы один раз*, расположив их по клеткам заготовленного квадрата так, чтобы суммы чисел в каждом ряду и в каждом столбце квадрата оказались одинаковыми, то есть составить волшебный квадрат. Строго говоря, этот квадрат будет лишь почти волшебным, так как у настоящего волшебного квадрата должны быть одинаковыми суммы чисел не только в каждом ряду и столбце, но и в каждой диагонали (см. двенадцатую главу). Для игры, как видите, задание несколько облегчается, и в таком виде оно вполне посильно для любого, кто умеет складывать и вычитать.

В процессе решения числа можно перемещать из клетки в клетку и заменять одни другими из того же набора. Числа следует либо вписывать карандашом в клетки квадрата, либо написать в большом количестве на заранее нарезанных фишках, и эти фишки затем размещать по клеткам. По количеству разных чисел набор не должен быть очень большим. Это могут быть, например, все однозначные числа или часть их.

В соревновании нескольких играющих возможны два победителя: один за раннее окончание решения, другой — сумевший из заданных чисел составить квадрат с большей суммой чисел в каждом его ряду, чем у партнеров.

Пример 1. В квадрате 25 клеток. Заданные числа: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9. Используя эти числа, каждое не менее одного раза, нужно заполнить ими все клетки квадрата в соответствии с требованием игры. Одно из возможных решений представлено на рис. 165. Суммы чисел в каждом ряду и столбце одинаковы, каждая из них равна 30.

6	8	7	0	9
6	5	8	9	2
9	2	7	9	3
5	7	7	4	7
4	8	1	8	9

Рис. 165

7	3	4	2
3	4	4	5
5	4	4	3
1	5	4	6

Рис. 166

Пример 2. В квадрате 16 клеток. Задуманные числа: 1, 2, 3, 4, 5, 6 и 7. Расставьте их в соответствии с условием игры. Дополнительное требование: в четырех центральных клетках данного квадрата сумма чисел должна быть такой же, как и в каждом ряду или столбце.

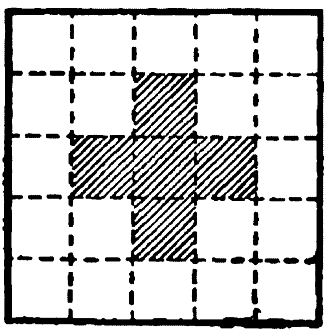


Рис. 167

Одно из возможных решений представлено на рис. 166.

Тема для игры. В квадрате 25 клеток. Заданные числа: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 и 8.

Нужно заполнить клетки квадрата заданными числами в соответствии с условием игры. Дополнительные требования:

а) в заштрихованных клетках (рис. 167) сумма чисел должна быть такой же, как и в каждом ряду или столбце;

б) числа 0 и 6 употребить только по одному разу.

264. Пересечение чисел

Заполнение какой-либо фигуры словами, как это требуется в кроссвордах, можно заменить заполнением свободных клеток этой фигуры числами, подбирая их в соответствии с указанными требованиями.

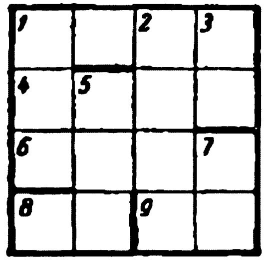


Рис. 168

Начальная цифра искомого числа должна быть помещена в нумерованную клетку, а последняя его цифра — в последнюю клетку строки или столбца или перед препятствием, изображаемым на рисунках жирной чертой или заштрихованной клеткой. Числа здесь, как и слова в кроссвордах, читаются по горизонтали (слева направо) и по вертикали (сверху вниз). В каждую клетку может быть вписана только одна цифра.

Вот несколько примеров задач на пересечение чисел.

Задача 1. Заполните все клетки квадрата (рис. 168) числами, удовлетворяющими следующим требованиям:

По горизонтали

1. Разность между числом, состоящим из четырех последовательных цифр, и числом, записанным теми же цифрами, но в обратном порядке (обращенное число).

4. Число с последовательно возрастающими цифрами.

6. Произведение двух чисел: №3 по вертикали и №8 по горизонтали.

8. Простое число, то есть такое, которое делится только на 1 и на себя.

9. Кратное числу 13.

По вертикали

1. Куб одной из цифр числа в №1 по горизонтали.

2. Последние три цифры совпадают с последними цифрами произведения двух чисел: №1 по горизонтали и №7 по вертикали.

3. Частное от деления №6 на №8 — оба по горизонтали.

5. Состоит из трех последовательных цифр.

7. Произведение множителя числа №3 по вертикали на множитель числа №1 по го ризонтали.

Как и в кроссвордах, решение следует начать с наиболее очевидного условия. Так, например, небольшой расчет позволит точно ответить на вопрос № 1 по горизонтали. Так как обращенное число по смыслу условия меньше первоначального, то, очевидно, цифры первоначального числа составляют убывающую последовательность:

$$a,\ a-1,\ a-2,\ a-3.$$

Считая эти буквы цифрами, запишем четырехзначное число арифметическим способом:

$$[a]\ [a-1]\ [a-2]\ [a-3].$$

Найдем разность между этим числом и обращенным:

$$\begin{array}{r} -\ [a]\ [a-1]\ [a-2]\ [a-3] \\ \underline{[a-3]\ [a-2]\ [a-1]\ [a]} \end{array}$$

$a-3$ единиц меньше a единиц; займем десяток, раздробим его в единицы, тогда $(10+a-3)-a=7$. Десятков было $a-2$, один заняли, значит, осталось их $a-3$, меньше чем $a-1$. Займем сотню, раздробим ее в десятки; тогда $(10+a-3)-(a-1)=8$. Сотен осталось ровно столько, сколько требуется вычесть, значит, на месте сотен будет нуль, а на месте тысяч $a-(a-3)=3$. Окончательно:

$$\begin{array}{r} -\ [a]\ [a-1]\ [a-2]\ [a-3] \\ \underline{[a-3]\ [a-2]\ [a-1]\ [a]} \\ 3\qquad 0\qquad 8\qquad 7 \end{array}$$

Вписываем это число в первую строку данного квадрата (рис. 169).

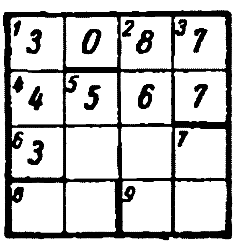


Рис. 169

Теперь нетрудно ответить и на вопрос № 1 по вертикали. По условию в этой вертикали должен находиться куб какого-либо из трех чисел: 3, 7 или 8. Подходит 343 (куб числа 7). Условию вопроса № 4 по горизонтали, очевидно, удовлетворяет число 4567. Теперь выяснилось и число для № 3 по вертикали.

Остальные числа подберите самостоятельно.

Задача 2. Заполните все клетки квадрата (рис. 170) числами, удовлетворяющими следующим требованиям:

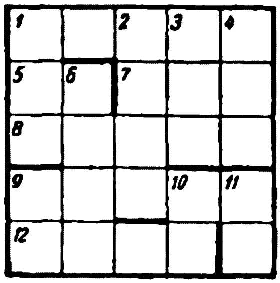


Рис. 170

По горизонтали

1. Число, у которого все цифры различны, причем нет цифр, общих с числом № 8 по горизонтали, у которого в свою очередь тоже все цифры различны.

5. Наибольший множитель числа № 3 по вертикали.

7. Обращение числа № 3 по вертикали.

8. См. № 1 по горизонтали.

9. Одна девятая суммы чисел № 1 и № 8 по горизонтали.

12. Произведение трех двузначных простых чисел, два из которых будут множителями обращенного числа № 6 по вертикали.

По вертикали

1. Первая цифра равна сумме остальных двух.

2. Год второй половины XVIII века.

3. Разность между числами № 1 и № 8 по горизонтали.

4. Последняя цифра числа будет произведением его первых двух цифр.

6. Обращенное число будет кратным числу № 3 по вертикали и состоит из трех двузначных простых множителей.

9. Один из множителей обращенного числа № 6.

10. То же, что № 5 по горизонтали.

11. Наименьший множитель числа № 3 по вертикали.

Задача 3. Заполните все клетки квадрата, изображенного на рис. 171, числами, удовлетворяющими следующим требованиям:

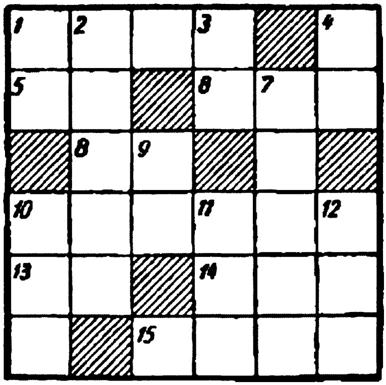


Рис. 171

По горизонтали

1. Квадрат некоторого простого числа.

5. Половина числа, являющегося общим наибольшим делителем чисел № 10 и № 11 по вертикали.

6. Куб некоторого квадратного числа.

8. Результат извлечения квадратного корня из числа № 1 по горизонтали.

10. Квадрат некоторого числа. Это симметричное число, то есть такое, которое одинаково читается как слева направо, так и справа налево.

13. На 1 больше числа № 9 по вертикали.

14. В пять раз больше, чем число № 8 по горизонтали.

15. Квадрат числа на 1 большего, чем № 13 по горизонтали.

По вертикали

1. На 8 единиц меньше наименьшего целого числа, дающего при делении на 2, 3, 4, 5 и 6 соответственно остатки 1, 2, 3, 4 и 5.

2. Сумма его цифр равна 29.

3. Простое число.

4. Простое число, являющееся множителем числа № 11 по вертикали.

7. Учетверенное произведение одной десятой числа № 15 по горизонтали на число № 13 по горизонтали.

9. Удвоенное число № 4 по вертикали.

10. Обращенное число № 11 по вертикали.

11. Квадратный корень из числа № 10 по горизонтали.

12. Кратное наибольшему множителю числа № 13 по горизонтали.

Б. Фокусы

Основная тема арифметических фокусов — *угадывание задуманных чисел* или результатов действий над ними. Весь «секрет» этих фокусов в том, что отгадчик знает и умеет использовать особые свойства чисел, а задумывающий этих свойств не знает[1].

Математический интерес каждого фокуса и заключается в «разоблачении» его теоретических основ, которые в большинстве случаев довольно просты, но иногда бывают хитро замаскированы.

Проверить выполнимость каждого фокуса можно на любом примере, но для обоснования большинства арифметических фокусов удобнее всего прибегнуть к алгебре. На первых порах вы можете опустить «доказательства» фокусов и ограничиться лишь усвоением их содержания для показа своим друзьям. Но и доказательства не затруднят тех, кто любит размышлять и знаком с начатками алгебры.

Здесь дается только основной каркас фокусов, так как их практическое оформление может быть различным в зависимости от условий и места, а также от вашего вкуса, остроумия и выдумки.

265. Угадывание задуманного числа (семь фокусов)

Фокус 1. Задумайте число. Отнимите 1. Остаток удвойте и прибавьте первоначально задуманное число. Скажите результат. Я угадаю задуманное число.

Способ угадывания. Прибавьте к результату 2, а сумму разделите на 3. Частное — задуманное число.

Пример. Задумано 18; $18 - 1 = 17$; $17 \times 2 = 34$; $34 + 18 = 52$. Угадываем: $52 + 2 = 54$; $54 : 3 = 18$.

Доказательство. Задуманное число обозначим буквой x. Выполняем требуемые действия:

$$x - 1,\ 2\,(x - 1),\ 2\,(x - 1) + x.$$

---

[1] Много математических фокусов и тем для них вы найдете и в других главах этой книги.

Результат:

$$2x - 2 + x = 3x - 2.$$

Прибавляя 2, получаем $3x$, а разделив на 3, получаем задуманное число x.

Фокус 2. Предложите своему другу задумать какое-либо число. Затем заставьте его несколько раз поочередно умножать и делить задуманное им число на различные, произвольно вами назначаемые числа. Результат действий пусть он вам не сообщает.

После нескольких умножений и делений остановитесь и предложите задумавшему число *разделить* полученный им результат на то число, которое он задумал, затем *прибавить* к последнему частному задуманное число и сказать вам результат. По этому результату вы немедленно угадаете число, задуманное вашим другом.

Секрет очень прост. Угадывающему самому тоже нужно задумать произвольное число (например, 1) и проделывать над ним все назначаемые им умножения и деления вплоть до деления на первоначально задуманное число. Тогда *в частном у него получится то же самое число, что и у другого задумавшего*, хотя бы первоначально задуманные числа и были у них различными. После этого угадывающему нужно вычесть из сообщенного ему результата свой результат. Разность и будет искомым числом.

Пример. Задумано число 7. Умножено на 12. Результат (84) разделен на 2. Полученное число (42) умножено на 5. Результат (210) разделен на 3. Получилось 70, а после деления на задуманное число и прибавления задуманного числа — 17.

Одновременно вы сами задумали число 1. Умножаете на 12, получается 12. Делите на 2, получается 6. Умножаете на 5, получается 30. Делите на 3, получается 10. Вычитая 10 из 17, получаете искомое число 7.

Замечание 1. Для усиления эффекта вы можете предоставить своему другу возможность самому назначать числа, на которые ему хотелось бы умножать и делить получающиеся результаты, лишь бы он каждый раз сообщал вам эти числа.

Замечание 2. Не обязательно чередовать умножения и деления. Можно сначала назначить несколько умножений, а затем несколько делений, или наоборот.

Докажите этот фокус, то есть объясните словами, что он удается для любого задуманного числа.

Фокус 3. Условимся называть большей частью нечетного числа ту, которая на 1 больше другой. Так, у числа 13 большая часть равна 7, у числа 21 большая часть равна 11.

Задумайте число. Прибавьте к нему его половину или, если оно нечетное, то его бо́льшую часть. К этой сумме прибавьте ее половину или, если она нечетная, то ее бо́льшую часть. Разделите полученное число на 9, сообщите частное, и если получится остаток, то скажите, больше он, равен или меньше 5. В зависимости от полученного ответа на вопрос задуманное число равно:

$$\begin{array}{l}\text{учетверенному}\\ \text{частному}\end{array}\begin{cases}\text{если нет остатка;}\\ +\ 1\text{, если остаток меньше пяти;}\\ +\ 2\text{, если остаток равен пяти;}\\ +\ 3\text{, если остаток больше пяти.}\end{cases}$$

Пример. Задумано 15. Выполняя требуемые действия, имеем: $15 + 8 = 23$, $23 + 12 = 35$, $35 : 9 = 3$ (в остатке 8). Сообщено: «частное 3, остаток больше 5».

Угадываем: $3 \times 4 + 3 = 15$. Задумано 15.

Докажите и этот фокус. При обдумывании доказательства советую принять во внимание, что всякое целое число (а значит, и задуманное) может быть представлено в виде одной из следующих форм:

$$4n,\ 4n + 1,\ 4n + 2,\ 4n + 3,$$

где букве n можно придавать значения: 0, 1, 2, 3, 4,...

Фокус 4. Сначала поступайте, как в предыдущем фокусе, то есть предложите задумать число и прибавить к нему его половину или его бо́льшую часть, затем снова прибавить половину получившейся суммы или ее бо́льшую часть. Но теперь вместо требования разделить результат на 9 предложите назвать по разрядам все цифры получившегося результата, кроме одной, лишь бы эта неизвестная отгадывающему цифра не была нулем. Необходимо также, чтобы задумавший число сказал разряд той цифры, которая утаена от него, и в каких случаях (в первом, во втором или в первом и втором, или ни разу) пришлось ему прибавлять бо́льшую часть числа. После этого, чтобы узнать задуманное число, нужно сложить все цифры, которые названы, и прибавить:

0, если ни разу не пришлось прибавлять бо́льшую часть числа;

6, если только в первом случае пришлось прибавлять бо́льшую часть числа;

4, если только во втором случае пришлось прибавлять бо́льшую часть числа;

1, если в обоих случаях пришлось прибавлять бо́льшую часть числа.

Далее, во всех случаях получившуюся сумму нужно дополнить до ближайшего числа, кратного 9. Это дополнение и будет утаенной цифрой. Теперь, зная все цифры результата, а значит, и весь результат, нетрудно найти и задуманное число. Для этого нужно полученный результат разделить на 9, умножить частное на 4 и в зависимости от величины остатка прибавить к произведению 1, 2 или 3.

Пример 1. Задумано 28. После того как выполнены требуемые действия, получилось 63. Утаили цифру 3. Тогда угадывающий дополняет сообщенную ему цифру десятков 6 до 9 и получает цифру единиц 3. Результат 63 обнаружен. Искомое число $(63 : 9) - 4 = 28$.

Пример 2. Задумано 125. После выполнения всех требуемых действий получилось 282. Утаена, положим, цифра сотен 2. Сообщено: цифры десятков и единиц соответственно 8 и 2, а бо́льшая часть числа прибавлялась только в первом случае.

Угадываем: $8 + 2 + 6 = 16$. Ближайшее число, кратное девяти, 18. Значит, утаенная цифра сотен $18 - 16 = 2$.

Определяем задуманное число: $282 : 9 = 31$ (остаток 3); $31 \times 4 + 1 = 125$.

Пример 3. Пусть задумавший число скажет, что последний полученный им результат состоит из трех цифр, причем первая цифра 1, последняя 7, а бóльшую часть числа пришлось прибавлять в двух случаях.

Угадываем задуманное число: $1 + 7 + 1 = 9$. Дополнение до числа, кратного 9, равно нулю или 9, но нуль по условию утаивать нельзя, следовательно, утаенная цифра 9 и весь результат 197. Делим 197 на 9: $197 : 9 = 21$ (остаток 8). Задуманное число $21 \times 4 + 3 = 87$.

Докажите фокус. Это нетрудно, в особенности для тех, кто уяснил суть доказательства предыдущего фокуса.

Фокус 5. Задумайте какое-нибудь число (меньше 100, чтобы не усложнять вычисления) и возведите его в квадрат. К *задуманному* числу прибавьте любое число (только скажите какое) и полученную сумму тоже возведите в квадрат. Найдите разность между получившимися квадратами и сообщите результат. Чтобы угадать задуманное число, достаточно *половину* этого результата разделить на число, прибавленное к задуманному, а из частного вычесть половину делителя.

Пример. Задумано 53; $53^2 = 2809$. К задуманному числу прибавлено 6:

$$53 + 6 = 59,\ 59^2 = 3481,\ 3481 - 2809 = 672.$$

Этот результат сообщен. Угадываем:

$$672 : 12 = 56,\ 6 : 2 = 3,\ 56 - 3 = 53.$$

Задуманное число 53.

Найдите доказательство.

Фокус 6. Предложите своему другу задумать любое число в пределах от 6 до 60. Пусть теперь он разделит задуманное число сначала на 3, потом его же разделит на 4, а затем и на 5 и сообщит остатки от делений. По этим остаткам при помощи ключевой формулы вы найдете задуманное число.

Пусть остатки r_1, r_2 и r_3. Запомните теперь такую формулу:

$$S = 40r_1 + 45r_2 + 36r_3.$$

Если получится $S = 0$, то задумано число 60; если же $S \neq 0$, то остаток от деления S на 60 и даст вам задуманное число. Вашему другу не так-то легко будет самому додуматься до секрета угадывания, которым вы владеете.

Пример. Задумано 14. Сообщены остатки: $r_1 = 2$, $r_2 = 2$, $r_3 = 4$.

Угадываем:

$$S = 40 \times 2 + 45 \times 2 + 36 \times 4 = 314;\ 314 : 60 = 5$$

и в остатке 14.

Задуманное число 14.

Не стоит слепо верить формуле, предложенной без вывода. Убедитесь сначала в том, что она во всех случаях, допускаемых условием фокуса, действует безотказно, а потом демонстрируйте свое умение.

Фокус 7. Уяснив математическую основу изложенных здесь фокусов, вы можете их всячески видоизменять, придумывать другие правила угадывания чисел, разнообразить предлагаемые вопросы.

Вот, например, такая тема. В предыдущем фокусе угадывания задуманного числа по его остаткам от деления были предложены в качестве делителей числа 3, 4 и 5. Заменим их другими делителями, например такими, как 3, 5, 7, и раздвинем пределы для задумываемых чисел от 7 до 100. Множители в ключевой формуле, конечно, тоже изменятся. Подберите их для новой ключевой формулы, пригодной для данного случая.

Ответ. $S = 70r_1 + 21r_2 + 15r_3$, где r_1, r_2 и r_3 — соответственно остатки от деления задуманного числа на 3, 5 и 7. Задуманное число равно остатку от деления S на 105 (если же $S = 0$, то задумано 105).

266. Угадать результат вычислений, ничего не спрашивая

Есть и такие закономерности в математике, которые приводят к заранее намеченному результату выполнения определенных действий, каковы бы ни были исходные числа. Отсюда возникают очень интересные способы «угадывания» результата вычислений, *ничего не спрашивая* у задумавшего число.

Следующие два фокуса иллюстрируют это положение. Эти фокусы можно проводить как с одним участником, так и с целой группой.

Фокус 1. Предложите *умножить* задуманное число на произвольно выбранное вами число, а к полученному произведению *прибавить* число, тоже произвольно вами выбранное. Сумму предложите *разделить* на третье вами же произвольно данное число. Вы в это время разделите в уме *первое* из названных вами чисел на *третье.* У вас получится некое число — именно столько раз вы предложите участнику фокуса *отнять* от полученного им частного задуманное число. Этот последний результат вы и угадаете. Он будет равен *частному* от деления *второго* из предложенных вами чисел на *третье.*

Пример. Предположим, задумано 6. Вы предлагаете умножить задуманное число на 4 (запомните это число как первое). Получается 24. Предлагаете прибавить 15 (второе число); получается 39. Предлагаете разделить на 3 (третье число); получается 13. Вычисления в уме: $4 : 3 = 1\ 1/3$. Предлагаете участнику фокуса отнять от полученного им частного (от 13) задуманное число да еще одну треть его. Он отнимает 6 да еще 2 — всего 8 и получает $13 - 8 = 5$.

Вы в это время выполняете в уме деление второго из предложенных вами чисел (15) на третье (на 3) и тоже получаете число 5, которое и объявляете как ожидаемый результат.

Докажите, что такое совпадение результатов не случайно, а вполне закономерно.

Фокус 2. Напишите какое-нибудь число между 1 и 50 на кусочке бумаги и спрячьте, не показывая участникам фокуса.

В свою очередь, пусть каждый участник напишет, какое он пожелает, число (больше 50, но не превышающее 100), и, не показывая вам, произведет следующие действия:

1) прибавит к своему числу $99 - x$, где x — число, написанное вами на кусочке бумаги (эту разность вы в уме подсчитайте и назовите участникам фокуса только готовый результат);

2) зачеркнет в получившейся сумме крайнюю левую цифру и эту же цифру прибавит к оставшемуся числу;

3) получившееся число вычтет из числа, первоначально им написанного.

В результате у всех участников получится одно и то же число — именно то, которое было вами предварительно спрятано.

Пример. Число, написанное вами и спрятанное: 18; число, написанное одним из участников: 64. Предлагаете прибавить 99 – 18 = 81. Получается: 64 + 81 = 145.

Цифра 1 зачеркивается и прибавляется к оставшемуся числу: 45 + 1 = 46. Разность между задуманным числом (64) и полученным (46), 64 – 46 = 18, как раз и дает спрятанное вами число (18).

Как и всегда, вы, конечно, прежде всего постараетесь уяснить математическую основу возможности предвидения результата выполнения указанных действий.

267. Я узнал, кто сколько взял

Пусть *первый* участник фокуса возьмет любое количество предметов (спичек, монет и т. п.), кратное 4. *Второй* пусть возьмет столько раз по 7 предметов, сколько первый взял по 4. А *третьего* участника попросите взять столько же раз по 13 предметов.

Теперь пусть *третий* участник из числа взятых им предметов отдаст *первому* и *второму* столько, сколько у каждого из них уже имеется. Затем пусть *второй* участник отдаст *третьему* и *первому* столько предметов, сколько у каждого стало. Наконец, и *первый* пусть сделает то же самое.

Спросите у любого из участников фокуса, сколько предметов у него стало. Число, которое он вам назовет, разделите на 2. Частное укажет, сколько предметов первоначально взял первый участник. Число предметов, взятых первым, разделите на 4 и умножьте на 7. Это будет число предметов, взятых вторым участником. А третий взял столько раз по 13 предметов, сколько второй взял по 7.

Обосновать фокус очень легко.

268. Одна, две, три попытки... и я угадал

Задумайте какие-либо два положительных целых числа. *Сложите* их сумму с их произведением и скажите мне результат. Как спортсмен берет высоту после одной, двух попыток, так и я берусь угадать задуманные вами числа быстро, но, может быть, тоже не с первого раза.

Метод прост, хотя и не очевиден. Я прибавлю 1 к вашему результату, полученное число разложу на два множителя и от каждого множителя отниму по 1.

Пример 1. Мне сообщили результат: 34. Вычисляю: $34 + 1 = 35$; далее: $35 = 5 \times 7$, а также: $35 = 35 \times 1$. Следовательно, задуманные числа 4 и 6 или 34 и 0.

Могу предложить вам *вычесть* сумму задуманных чисел из их произведения. Теперь, чтобы узнать задуманные числа, я опять прибавлю 1 к вашему результату, разложу полученное число на два множителя и к каждому прибавлю по 1.

Пример 2. Сообщили результат: 64. Вычисляю: $64 + 1 = 65$; $65 = 13 \times 5$ или $65 = 65 \times 1$. Следовательно, задуманные числа 14 и 6 или 66 и 2.

Докажите справедливость этого способа угадывания.

269. Кто взял резинку, а кто карандаш?

Отвернитесь и предложите двум участникам фокуса, пусть это будут Женя и Шура, взять одному карандаш, а другому резинку. Далее скажите:

— Обладателю карандаша назначаю число 7, обладателю резинки — число 9 (числа могут быть и иными, причем обязательно одно *простое*, а другое *составное*, но не делящееся на первое).

— Женя, умножь свое число на 2, а Шура на 3 (одно из этих чисел должно целое число раз содержаться в назначенном вами составном числе, как, например, 3 в 9, а другое должно быть с ним взаимно простым, как например, 3 и 2).

— Сложите результаты и скажите мне сумму или скажите, делится ли эта сумма без остатка на 3 (на то данное вами число, которое содержится множителем в назначенном составном числе). Узнав это, вы тотчас определите, кто взял карандаш, а кто резинку.

В самом деле, если полученная сумма делится на 3 — это значит, что на 3 умножено число, не делящееся на 3, то есть 7. Зная, кто умножал свое число на 3 (Шура) и что число 7 назначено обладателю карандаша, вы заключаете, что карандаш у Шуры. Наоборот, если полученная сумма не делится на 3, то это значит, что на 3 было умножено число, делящееся на 3, то есть 9. В этом случае у Шуры — резинка.

Как вы докажете этот фокус?

270. Угадывание трех задуманных слагаемых и суммы

Предложите своим друзьям написать какие-нибудь три последовательных числа, каждое не более 60 (например, они напишут: 31, 32, 33). Еще одно число, кратное 3 и меньшее чем 100, попросите их сказать вслух (например, они скажут: 27). Это число вам следует запомнить. Попросите их сложить все 4 числа ($31 + 32 + 33 + 27 = 123$) и сумму умножить на 67 ($123 \times 67 = 8241$).

Пусть теперь ваши гости скажут вслух *последние две* цифры результата. Вы тотчас можете назвать весь результат и задуманные три числа.

Способ угадывания. Разделить 27 на 3. Получится 9. К 9 прибавить 1, получится 10 — ключевое число. Вычитая его из числа, составленного двумя известными вам цифрами результата ($41 - 10 = 31$), вы и получите *наименьшее* из трех задуманных чисел. Удваивая 41, получите 82 — первые цифры результата. Обоснование этого способа угадывания задуманных чисел — интересная задача. Решите ее.

271. Угадать несколько задуманных чисел

Есть простой способ угадывания нескольких задуманных однозначных чисел. *Первое* из задуманных чисел умножить на 2 и к произведению прибавить 5. Полученное умножить на 5 и к произведению прибавить 10. К результату прибавить *второе* задуманное число и все умножить на 10, к полученному результату прибавить *третье* задуманное число и опять умножить на 10, потом прибавить *четвертое* задуманное число и снова умножить на 10. И так до тех пор, пока не будет прибавлено *последнее* из задуманных чисел. Последняя сумма и число задуманных чисел должны быть объявлены.

Для отгадывания задуманных чисел нужно из объявленной суммы вычесть:

35, если задумано 2 числа;
350, если задумано 3 числа;
3500, если задумано 4 числа;
....

Все цифры разности и будут задуманными.

Пример. Задуманы числа 3, 5, 8 и 2. Удваиваем первое: $3 \times 2 = 6$; прибавляем 5, получаем: $6 + 5 = 11$; умножаем на 5, получаем: $11 \times 5 = 55$; прибавляем 10 к предыдущему результату: $55 + 10 = 65$; прибавляем второе задуманное число: $65 + 5 = 70$; умножаем на 10, получаем: $70 \times 10 = 700$; прибавляем третье задуманное число: $700 + 8 = 708$ и далее: $708 \times 10 = 7080$; $7080 + 2 = 7082$. Из окончательной суммы вычитаем 3500; получается 3582. Все цифры этой разности — задуманные.

Докажите этот способ угадывания задуманных чисел.

Замечание. Этот фокус можно оформить как угадывание чисел очков, выпавших на брошенных игральных кубиках (о кубиках см. шестую главу), или как угадывание, на каком суставе какого пальца, какой руки и у кого именно надето колечко (например, из нитки, лоскутка материи или склеенное из полоски бумаги).

В последнем случае необходимо всех участников фокуса пронумеровать, условиться, какую руку считать первой, какую второй, пронумеровать пальцы рук и суставы на пальцах. Пусть, например, участник номер *четыре* надел колечко на *третий* сустав *пятого* пальца *второй* руки.

Вы предлагаете взявшему колечко удвоить свой номер (получится 8), прибавить 5, умножить результат на 5, прибавить 10, прибавить номер руки, умножить на 10, прибавить номер пальца руки, опять умножить на 10, прибавить номер сустава и сказать окончательную сумму.

Вам скажут в данном примере: 7753. Отнимите 3500, получается 4253. Цифры этого числа говорят: колечко на *третьем* суставе *пятого* пальца *второй* руки участника номер *четыре*.

272. Сколько вам лет?

Не хотите сказать? Ну, хорошо, скажите мне только, сколько получится, если от числа, в 10 раз большего, чем число ваших лет, вычесть произведение какого-нибудь однозначного числа на 9. Благодарю вас, теперь я знаю, сколько вам лет.

Способ отгадывания. Отделить от объявленного результата число единиц и сложить его с оставшимся числом.

Пример. От числа 170, которое в 10 раз больше числа лет, отняли, скажем, 27. После этого объявили результат: 143.

Определяем возраст: $14 + 3 = 17$ лет.

Легко и эффектно! Но... во избежание конфуза продумайте основу фокуса.

273. Угадать возраст

Для разнообразия можно предложить умножить число лет на 2, прибавить 5, а сумму опять умножить на 5, после чего попросить сказать результат. Последней цифрой результата, очевидно, будет 5. Нужно ее отбросить, а от оставшегося числа отнять 2. Разность — искомый возраст.

Пример. Пусть возраст — 21 год. Производим требуемые действия:

$$21 \times 2 = 42,\ 42 + 5 = 47,\ 47 \times 5 = 235.$$

Угадываем возраст: $23 - 2 = 21$.

Докажите этот вариант угадывания возраста.

274. Геометрический фокус (загадочное исчезновение)

Начертите на прямоугольном куске картона 13 одинаковых палочек на равном расстоянии друг от друга, как показано на рис. 172. Теперь разрежьте прямоугольник по наклонной прямой *MN*, соединяющей верхний конец самой левой палочки и нижний конец самой правой. Сдвиньте обе половинки прямоугольника вдоль линии разреза, как показано на рисунке.

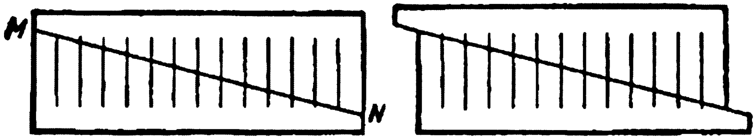


Рис. 172. Куда исчезла одна палочка?

Произошло любопытное явление: вместо 13 палочек их стало 12! Куда исчезла одна палочка?

Глава одиннадцатая

ДЕЛИМОСТЬ ЧИСЕЛ

Из всех действий арифметики самое своенравное — это деление. Оно обладает особыми свойствами, можно сказать, особым «нравом». Возьмем хотя бы обращение с нулем. Для всех других арифметических действий нуль — равноправное число. Его можно и прибавлять и вычитать, оно может быть множителем в действии умножения, но делителем — *никогда*. Разделить на нуль вообще нельзя никакое число, никакое алгебраическое выражение. Это — важная особенность деления, и если к ней отнестись невнимательно, то легко попасть впросак. Можно, скажем, «доказать» любое заведомо фальшивое утверждение — парадокс.

Как вы отнесетесь, например, к такому утверждению.

Всякое количество равно своей половине.

«Доказательство». Пусть a и b — два равных количества: $a = b$. Умножим обе части этого равенства на a:

$$a^2 = ab.$$

Теперь уменьшим на b^2 и левую и правую части равенства. Получившиеся разности $a^2 - b^2$ и $ab - b^2$ тоже будут равными:

$$a^2 - b^2 = ab - b^2.$$

Разложим на множители:

$$(a + b)\,(a - b) = b\,(a - b).$$

Делим обе части равенства на $a - b$, после чего получается такое равенство:

$$a + b = b.$$

Так как $b = a$, то в последнем равенстве можем заменить b через a, тогда $a + a = a$, или $2a = a$. Разделив на 2, получим $a = \frac{a}{2}$, а это значит, что целое равно своей половине (?).

Внешне, или, как говорят, формально все правильно, а по существу где-то в приведенных выкладках имеется изъян. Вы, конечно, были внимательны и заметили, в какой части преобразований это произошло.

«Нрав» деления проявляется не только по отношению к нулю. Математическая теория уделяет много внимания свойствам *целых* чисел и законам, управляющим действиями над ними. Так вот, если ограничиться множеством одних только целых (положительных и отрицательных) чисел, то опять-таки «капризничает» только одно действие: деление. Оно, как вы знаете, не всегда выполнимо в области целых чисел. Принято считать так, что целое число *a делится* на целое число b, если среди целых же чисел найдется такое число c, произведение которого на b дает точно число a; если же такого числа нет, то *a не делится* на b.

Все эти особенности деления и способствовали возникновению таких понятий, как простые числа, наибольший общий делитель (НОД), наименьшее общее кратное (НОК), признаки делимости чисел, а постепенное развитие теории делимости чисел привело к глубокому расширению всей теории чисел.

Полагаю, что работа над задачами этой главы в некоторой мере увеличит запас ваших школьных представлений о делимости чисел, а может быть, и побудит вас к систематическому изучению всей теории чисел.

275. Число на гробнице

В одной из египетских пирамид ученые обнаружили на каменной плите гробницы выгравированное иероглифами число

2520. Трудно точно сказать, за что выпала такая честь на долю этого числа. Может быть, за то, что оно без остатка делится на все без исключения целые числа от 1 до 10. Действительно, нет числа меньше 2520, обладающего указанным свойством. Нетрудно убедиться в том, что это число — наименьшее общее кратное целых чисел первого десятка.

276. Подарки к Новому году

К новогодней елке мы готовили детям подарки. Быстро разложили по пакетам конфеты и печенье. Но когда дело дошло до мандаринов, мы натолкнулись на забавное затруднение: сначала хотели разложить все мандарины по 10 штук в пакет (а в оставшиеся пакеты — яблоки), — не получилось: на один из пакетов осталось 9 мандаринов. Если бы положили по 9 мандаринов, осталось бы 8 мандаринов на один из пакетов. Попробовали раскладывать по 8 мандаринов, осталось 7. Стали раскладывать по 7, осталось 6. Положили по 6, осталось 5.

Что за история?! Неужели и дальше так будет продолжаться? Взяли бумагу, карандаш и начали рассчитывать. И что бы вы думали: делим число имеющихся у нас мандаринов на 5, остается 4; делим на 4, остается 3; делим на 3, остается 2; делим на 2, остается 1. Вот какое удивительное число мандаринов мы имели!

А сколько же все-таки?

277. Может ли быть такое число?

Может ли быть такое число, которое при делении на 3 дает в остатке 1, при делении на 4 дает в остатке 2, при делении на 5 дает в остатке 3 и при делении на 6 дает в остатке 4?

278. Корзина яиц (из старинного французского задачника)

Женщина несла на рынок корзину яиц. Прохожий нечаянно толкнул женщину, корзина упала, яйца разбились. Виновник несчастья, желая возместить потерю, спросил:

— Сколько всего яиц было в корзине?

— Точно не помню, — ответила женщина, — но знаю, что, когда я вынимала из корзины по 2, по 3, по 4, по 5 или по 6 яиц, в корзине оставалось одно яйцо, а когда я вынимала по 7, в корзине ничего не оставалось.

Сколько яиц было в корзине?

279. Трехзначное число

Если от задуманного мной трехзначного числа отнять 7, то оно разделится на 7, а если отнять от него 8, то оно разделится на 8, если отнять от него 9, то оно разделится на 9. Какое число я задумал?

280. Четыре теплохода

В порту пришвартовались 4 теплохода. В полдень 2 января они одновременно покинули порт.

Известно, что первый теплоход возвращается в этот порт через каждые 4 недели, второй — через каждые 8 недель, третий — через 12 недель, а четвертый — через 16 недель.

Когда в первый раз теплоходы снова сойдутся все вместе в этом порту?

281. Числовой ребус

Найти число t и числовое значение буквы a, заменяющей потерянную цифру в следующем равенстве: $[3\ (230 + t)]^2 = 492a04$.

282. Признак делимости на 11

Один из важнейших приемов решения задач таков: свести решение данной задачи к решению другой задачи, более простой.

Требуется, положим, установить: делится ли некоторое многозначное число на другое данное число? Чтобы ответить на этот вопрос, в ряде случаев совсем не нужно прибегать к непосредственному делению данного числа. Очень часто оказывается, что решение поставленной задачи можно свести к выяснению делимости некоторого другого, не многозначного числа, составленного по тому или иному правилу из цифр данного числа. Так и возникают признаки делимости чисел.

Знаком ли вам, например, такой несложный признак делимости чисел на 11?

Если сумма цифр данного числа через одну равна сумме остальных цифр через одну или разность этих сумм ***делится*** *на 11, то и данное число делится на 11.*

Если же указанные суммы цифр через одну не равны между собой и их разность не делится на 11, то и данное число не делится на 11.

Пример. Делится ли 3 528 041 на 11?

Применяем признак:

$$S_1 = 3 + 2 + 0 + 1 = 6,$$
$$S_2 = 5 + 8 + 4 = 17,$$
$$S_2 - S_1 = 11.$$

$S_2 - S_1$ делится на 11. Признак предсказывает: число 3 528 041 обязательно должно делиться на 11. Если потрудитесь выполнить деление, то убедитесь в том, что признак вас не обманул.

Обосновать этот признак делимости нетрудно, если предварительно заметить, что числа такого вида, как, например, $10 + 1$, $100 - 1$, $1000 + 1$, $10\,000 - 1$, $100\,000 + 1$ и т.д. делятся на 11.

Рассмотрим сначала разности: $100 - 1 = 99$, $10\,000 - 1 = 9999$ и т.д.; все они записываются четным числом девяток и, следовательно, делятся на 11. Делятся на 11 и все суммы указанного вида: $10 + 1 = 11$, $1000 + 1 = 99 \times 10 + 11$, $100\,000 + 1 = 9999 \times 10 + 11$ и т.д., так как каждая сумма разлагается на два слагаемых, каждое из которых делится на 11.

Обратимся теперь к установлению признака делимости на 11. Возьмем какое-нибудь многозначное число, например 3 516 282, и расчленим его следующим образом:

$$2 + 8 \times 10 + 2 \times 100 + 6 \times 1000 + 1 \times 10\,000 + 5 \times 100\,000 + 3 \times 1\,000\,000.$$

Все вторые сомножители (единицы с нулями) преобразуем так, чтобы образовались рассмотренные выше суммы и разности: 10 + 1, 100 – 1 и т. д. Имеем:

$$3\,516\,282 = 2 + 8\,(10 + 1 - 1) + 2 \times$$
$$\times\,(100 - 1 + 1) + 6\,(1000 + 1 - 1) + 1\,(10\,000 - 1 + 1) + 5 \times$$
$$\times\,(100\,000 + 1 - 1) + 3\,(1\,000\,000 - 1 + 1) = 2 + 8 \times$$
$$\times\,(10 + 1) - 8 + 2 \times (100 - 1) + 2 + 6\,(1000 + 1) - 6 +$$
$$+\,(10\,000 - 1) + 1 + 5 \times$$
$$\times\,(100\,000 + 1) - 5 + 3\,(1\,000\,000 - 1) + 3 =$$
$$= (2 - 8 + 2 - 6 + 1 - 5 + 3) + [8\,(10 + 1) + 2\,(100 - 1) + 6 \times$$
$$\times\,(1000 + 1) + (10\,000 - 1) + 5\,(100\,000 + 1) + 3\,(1\,000\,000 - 1)].$$

Все слагаемые, заключенные в квадратные скобки, непременно делятся на 11. Значит, делимость рассматриваемого числа на 11 полностью зависит от делимости на 11 числа, заключенного в первой круглой скобке: если оно делится / не делится на 11, то и рассматриваемое число делится / не делится на 11. Но в первой скобке записана разность сумм цифр данного числа через одну: (2 + 2 + 1 + 3) – (8 + 6 + 5) = –11. Так как эта разность, равная –11, делится на 11, то делится на 11 и данное число.

Если бы разность сумм цифр испытуемого числа через одну не делилась на 11, то не могло бы делиться на 11 и испытуемое число. В самом деле, рассмотренный пример показывает прием, при помощи которого можно любое целое число (N) расчленить на два слагаемых (x и y), $N = x + y$, так, что одно из них (x) непременно делится на 11, а другое (y) представляет собой разность сумм цифр испытуемого числа через одну.

Ясно, что если оба слагаемых x и y делятся на 11, то N также делится на 11, если же x делится на 11, а y не делится, то и N не делится.

Обратно, если N и x делятся на 11, то должно делиться на 11 и y; если же N не делится на 11, а x делится, то y не может делиться на 11.

Так решение вопроса о делимости любого многозначного числа на 11 сводится к более легкому выяснению делимости на 11 разности сумм цифр числа через одну.

* * *

Решите самостоятельно еще один арифметический ребус.

Как быстро обнаружить недостающую цифру a в восьмизначном числе 37 a10 201 и каким числом заменить букву x в выражении $[11\,(492 + x)]^2$, чтобы равенство

$$[11\,(492 + x)]^2 = 37\,a10\,201$$

было верным?

283. Объединенный признак делимости на 7, 11 и 13

В таблице простых чисел, то есть таких, которые делятся только на 1 и на себя, числа 7, 11 и 13 расположены рядом (см. таблицу простых чисел в задаче 324). Их произведение равно $7 \times 11 \times 13 = 1001 = 1000 + 1$. Заметим пока, что 1000 + 1 делится и на 7, и на 11, и на 13. Далее, если любое трехзначное число умножить на 1001, то произведение запишется такими же цифрами, как и множимое, только повторенными два раза.

Пусть $\overline{abc}$ — какое-либо трехзначное число (a, b и c — цифры этого числа). Умножим его на 1001:

$$\begin{array}{r} \times\ \ \overline{abc} \\ 1001 \\ \hline \overline{abc} \\ \overline{abc}\quad\ \ \\ \hline \overline{abcabc}. \end{array}$$

Следовательно, все числа вида $\overline{abcabc}$ делятся на 7, на 11 и на 13. В частности, делится на 7, 11 и 13 число 999 999, или, иначе, 1 000 000 – 1.

Указанные закономерности позволяют свести решение вопроса о делимости *многозначного* числа на 7, или на 11, или на 13 к делимости на них некоторого другого числа — не более чем *трехзначного*.

Требуется, положим, определить, делится ли число 42 623 295 на 7, 11 и 13. Разобьем данное число справа налево на грани по три цифры. Крайняя левая грань может и не иметь трех цифр. Представим теперь данное число в таком виде:

$$42\ 623\ 295 = 295 + 623 \times 1000 + 42 \times 1\ 000\ 000,$$

или (аналогично тому, как это мы делали при рассмотрении признака делимости на 11):

$$42\ 623\ 295 = 295 + 623\ (1000 + 1 - 1) + 42\ (1\ 000\ 000 - 1 + 1) =$$
$$= (295 - 623 + 42) + [623\ (1000 + 1) + 42\ (1\ 000\ 000 - 1)].$$

Число в квадратной скобке обязательно делится и на 7, и на 11, и на 13. Значит, делимость испытуемого числа на 7, 11 и 13 полностью определяется делимостью числа, заключенного в первой круглой скобке.

Рассматривая каждую грань испытуемого числа как самостоятельное число, можно высказать следующий объединенный признак делимости сразу на три числа 7, 11 и 13:

Если разность сумм граней данного числа, взятых через одну, делится на 7, или на 11, или на 13, то и данное число делится соответственно на 7, или на 11, или на 13.

Вернемся к числу 42 623 295. Определим, на какое из чисел 7, 11 или 13 делится разность сумм граней данного числа: (295 + 42) – 623 = –286. Число –286 делится на 11 и на 13, а на 7 оно не делится. Следовательно, число 42 623 295 делится на 11 и на 13, но на 7 не делится.

Очевидно, что делимость на 7, 11 и 13 четырех-, пяти- и шестизначных чисел, то есть чисел, разбивающихся всего лишь на две грани (практически более частый случай), определяется делимостью на 7, 11 и 13 *разности* граней данного числа. Так, например, легко установить, что 29 575 делится на 7 и на 13, но не делится на 11. Действительно, разность граней равна 575 – 29 = 546, а число 546 делится на 7 и на 13 и не делится на 11.

Задача. Устанавливая объединенный признак делимости на 7, 11 и 13, мы оперировали числом, разбивавшимся на три грани. Проведите обоснование этого признака на примере числа, разбивающегося на четыре грани по три цифры справа налево.

284. Упрощение признака делимости на 8

В школе обычно сообщают такой признак делимости на 8:

Если число, которое составляют последние три цифры данного числа, делится на 8, то и все данное число делится на 8.

Значит, вопрос сводится к делимости на 8 некоторого трехзначного числа.

Но при этом ничего не говорится о том, как в свою очередь быстро узнать, делится ли это трехзначное число на 8. Делимость трехзначного числа на 8 тоже ведь не всегда сразу видна, приходится фактически производить деление.

Признак делимости на 4 проще. Здесь требуется, чтобы делилось на 4 число, состоящее только из двух последних цифр испытуемого числа.

Естественно возникает вопрос: нельзя ли упростить и признак делимости на 8? Можно, если дополнить его специальным признаком делимости трехзначного числа на 8.

На 8 делится всякое трехзначное число, у которого двузначное число, образованное цифрами сотен и десятков, сложенное с половиной числа единиц, делится на 4.

Пример. Данное число 592. Для решения вопроса о делимости его на 8 отделяем единицы и половину их числа прибавляем к числу из следующих двух цифр (десятков и сотен). Получаем 59 + 1 = 60. Число 60 делится на 4, значит, число 592 делится на 8.

Докажите справедливость высказанного здесь признака делимости на 8 для трехзначного числа и сформулируйте упрощенный признак делимости на 8 для всякого числа.

Замечание 1. Ясно, что число, оканчивающееся нечетной цифрой, не может делиться на 8.

Замечание 2. В огромном большинстве случаев сумма двузначного числа, упомянутого в признаке, с половиной единиц данного числа будет давать двузначное же число.

Сумма будет трехзначной только для чисел в промежутке от 984 до 998, но даже и в этих случаях она не превысит числа 103 (99 + 4 = 103).

285. Поразительная память

Объявите своим друзьям, что если даже ограничиться только шестизначными и девятизначными числами, делящимися на 37, то все равно их чрезвычайно много и тем не менее вы знаете их все наизусть.

Чтобы усилить эффект, скажите, что вы беретесь моментально приписать к любому заранее назначенному трехзначному числу еще три цифры или даже шесть цифр так, что образовавшееся шестизначное или девятизначное число непременно будет делиться на 37.

Положим, вам назначили число 412. Припишите к нему 143 справа или слева — безразлично. Получатся числа 143 412 или 412 143, каждое из которых делится на 37.

Здесь дело, конечно, не в феноменальной памяти. Память вы можете иметь самую обыкновенную, но нужно знать довольно простой признак делимости на 37, заключающийся в следующем.

Разбиваем данное число справа налево на грани по три цифры (последняя грань слева может быть неполной). Рассматривая каждую грань как самостоятельное число, сложим эти числа. Если полученная сумма делится на 37, то делится и данное число.

Например, число 153 217 делится на 37, так как $153 + 217 = 370$ тоже делится на 37.

Доказательство. Пусть N — число, разбивающееся на две грани. Представим его в следующей форме: $N = 1000a + b$, где a — число, составляющее левую грань, b — трехзначное число, составляющее правую грань данного числа. Если N делится на 37, то $1000a + b = 37k$ (k — целое положительное число). Докажем, что в таком случае $a + b$ тоже делится на 37.

В самом деле, выразим b из первого равенства и подставим в $a + b$. Тогда

$$a + b = a + (37k - 1000a) = 37k - 999a = 37\ (k - 27)$$

делится на 37.

Обратно, пусть $a + b$ делится на 37, тогда $a + b = 37k$. Выразим отсюда b и подставим в равенство $N = 1000a + b$. Получаем:

$$N = 1000a + 37k - a = 999a + 37k = 37\ (27 + k),$$

то есть N делится на 37.

Для чисел, разбивающихся на большее количество граней, рассуждения аналогичные.

Секрет фокуса, следовательно, в умелом приписывании к назначенному вашими друзьями трехзначному числу одного (для числа шестизначного) или двух (для числа девятизначного) своих трехзначных чисел — таких, чтобы сумма всех приписанных вами чисел и числа, назначенного вам, делилась на 37.

Как же этого достигнуть?

Очень просто. Приписывайте, например, такие числа, которые в сумме с назначенным составляли бы *трехзначное* число с *одинаковыми* цифрами: 111 или 222, или 333 и т.д. до 999, так как всякое трехзначное число, состоящее из одинаковых цифр, непременно делится на 37.

Если назначенное число, скажем, 341, то приписывайте 103 (дополнение до 444) или 214 (дополнение до 555) и т.д. Такое дополнение в уме произвести очень легко. Это и обеспечит вам обещанную быстроту осуществления фокуса.

В случае требования написать девятизначное число, делящееся на 37, приписывайте три цифры произвольно, но с таким расчетом, чтобы последними тремя цифрами можно было образовать число, дополняющее всю сумму до какого-либо трехзначного числа с одинаковыми цифрами.

Так, например, если вам назначено число 412, то можно приписать, скажем, сначала 101, а затем 042 как дополнение контрольной суммы до 555. Получится число 412 101 042.

При этом помните, что для разнообразия вы можете приписывать свои числа по разные стороны от назначенного.

Если назначенное число само состоит из одинаковых цифр, например 333, то приписывать к нему число, состоящее тоже из одинаковых цифр, рискованно: таким приписыванием можно легко себя разоблачить. Чтобы этого избежать, прибавьте в уме

37 или 74 к числу, которое вы хотели бы приписать, или, наоборот, уменьшите его на 37 или 74.

Можно разрешить назначить двузначное или однозначное число. В таком случае сначала припишите к нему любую третью цифру или вторую и третью, а дальше действуйте как рассказано.

Задача. Докажите признак делимости на 37 для числа, разбивающегося на три грани.

286. Объединенный признак делимости на 3, 7 и 19

Произведение простых чисел 3, 7 и 19 равно 399. Подмечено следующее любопытное свойство:

Если число $100a + b$ (где b — двузначное число, a — любое целое положительное) делится на 399 или на какой-либо из его множителей, то вместе с ним на то же число делится и $a + 4b$.

Докажите это утверждение.

Сформулируйте и докажите обратную теорему.

На основании доказанного установите объединенный признак делимости чисел на 3, 7 и 19.

287. Делимость двучлена

Несколько предварительных замечаний.

1) Многочленом называется алгебраическое выражение вида:

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

где n — число целое, положительное; коэффициенты a_0, $a_1 \ldots a_n$ — любые действительные числа; под буквой x также подразумевается любое действительное число.

2) Если один многочлен (p) указанного вида равен произведению двух других (m_1 и m_2), $p = m_1 m_2$, то мы говорим, что многочлен p *делится* на многочлен m_1 (или m_2) и в частном получается многочлен m_2 (или m_1).

Например, $x^2 - 9$ делится на $3x + 9$ и в частном получается $\frac{1}{3}x - 1$. Действительно,

$$(3x+9)\left(\frac{1}{3}x-1\right)=x^2-9.$$

Заметим, между прочим, что часть коэффициентов частного — дробные числа, в то время как все коэффициенты делимого и делителя — целые.

3) Из факта делимости одного многочлена с целыми коэффициентами на другой многочлен также с целыми коэффициентами еще *не следует*, что делятся числа, в которые обращаются делимое и делитель при замене x любым целым числом, если, разумеется, делимость рассматривать с точки зрения арифметики целых чисел.

Например, как мы видели выше, $(x^2-9):(3x+9)=\frac{1}{3}x-1$. При $x=6$ делимое обращается в число $6^2-9=27$, делитель — в число $3\times 6+9=27$, и здесь делимое делится на делитель: $27:27=1$. Но при $x=7$ делимое обращается в число $49-9=$ $=40$, делитель — в число $3\times 7+9=30$, и теперь делимое не делится на делитель с точки зрения арифметики целых чисел.

4) Если же все коэффициенты многочленов — делимого, делителя и частного — целые числа, то число, в которое обращается многочлен-делимое, непременно делится на число, в которое обращается многочлен-делитель при замене x любым целым числом, кроме тех, которые обращают делитель в нуль.

Например,

$$(2x^2-3x^2-8x+12):(x^2-4)=2x-3.$$

Все коэффициенты целые, следовательно, будут делиться и числовые значения делимого и делителя при замене x любым целым числом, кроме $x=\pm 2$, так как при этих значениях делитель обращается в нуль и деление невозможно. Так, при $x=3$ имеем:

значение делимого: $2\times 3^2-3\times 3^2-8\times 3+12=15$,

значение делителя: $3^2-4=5$.

Убеждаемся в том, что первое значение делится на второе: $15:5=3$. Тому же числу 3 равно и значение частного: $2\times 3-3=3$.

* * *

Для решения некоторых задач, в частности для доказательства признаков делимости чисел, полезно знать, при каких условиях сумма и разность степеней двух чисел ($x^m + a^m$ и $x^m - a^m$, m — целое положительное число) делятся на сумму и разность их оснований ($x + a$ и $x - a$).

Ответ на этот вопрос дается в школьном курсе алгебры. Но и для читателя, еще не добравшегося в своем образовании до этой темы, не составит большого труда разобраться в решении поставленного вопроса.

Алгебраические выражения $x^m + a^m$ и $x^m - a^m$— это частные виды многочлена

$$a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \dots + a_1 x + a_0 \qquad (*)$$

(под всеми буквами многочлена будем здесь подразумевать только целые числа, включая нуль).

Если, например, $m = 4$, $a_m = 1$, $a_{m-1} = a_{m\text{-}2} = \dots = a_1 = 0$; $a_0 = 16$, то получается такой частный вид многочлена: $x^4 = 16$, или $x^4 + 2^4$.

Попробуем теперь разделить $x^4 + 2^4$ на $x + 2$:

$$\begin{array}{r|l}
-\,x^4+16 & x+2 \\
\underline{x^4+2x^3} & \overline{x^3 - 2x^2+4x - 8} \\
-\,-2x^3 \qquad\quad & \\
\underline{-2x^3 - 4x^3} \qquad & \\
-\,4x^2 \qquad & \\
\underline{4x^2 + 8x} & \\
-\,-8x + 16 & \\
\underline{-8x - 16} & \\
32 \text{ (остаток)} &
\end{array}$$

Не делится $x^4 + 2^4$ на $x + 2$. Замечаем, что остаток не содержит x, а представляет собой некоторое число.

Легко понять, что не только в этом примере, но и во всех случаях деления многочлена на двучлен вида $x + a$, то есть на двучлен, содержащий x не выше, чем в первой степени, остатком будет некоторое число (либо совсем не будет остатка).

Чтобы деление совершилось без остатка, нужно делимое уменьшить на величину остатка. Поэтому всегда справедливо такое утверждение: делимое минус остаток равно произведению делителя и частного. Например,

$$(x^4 + 16) - 32 = (x + 2) \times (x^3 - 2x^2 + 4x - 8).$$

Убедитесь непосредственной проверкой в том, что это равенство алгебраических выражений обращается в равенство чисел при замене буквы x каким угодно числом. Равенство, обладающее такой особенностью, называют для краткости *тождеством*.

Предположим теперь, что вы берете произвольный многочлен вида (*), делите его на двучлен вида $x + a$ и составляете равенство

$$A = (x - a)\, B + C,$$

где буквой A для краткости записи я обозначил многочлен-делимое, буквой B — частное, а буквой C — остаток.

Спрашивается, всегда ли равенство

$$A = (x - a)\, B + C \qquad (**)$$

будет тождеством?

Ответ. Всегда.

Доказательство этого утверждения в общем виде громоздко, но любой пример подтвердит его справедливость.

Такого рода тождество (**) любопытно тем, что с его помощью можно, *не производя* деления, узнать остаток. Например, я сообщил вам следующие данные: делимое $x^4 + 1$, делитель $x - 1$, частное $x^3 + x^2 + x + 1$. Какое число C будет остатком?

Решение. Составим равенство

$$x^4 + 1 = (x - 1)\,(x^3 + x^2 + x + 1) + C.$$

Так как оно должно быть тождеством, то положим, например, $x = 1$. Тогда $1 + 1 = 0 + C$. Отсюда $C = 2$. При любых других значениях x получается такое же значение C. Пусть еще, например, $x = 2$. Тогда $16 + 1 = (2 - 1)\,(8 + 4 + 2 + 1) + C$, или $17 = 15 + C$. Отсюда снова $C = 2$.

Значит, никакого иного остатка, как только $C = 2$, и быть не может. Проверьте делением.

Еще интереснее. Можно не знать не только остаток, но и частное и все-таки определить остаток, не производя деления. Пусть, например, делимое $x^4 - 1$, а делитель $x + 1$. Как узнать остаток, не производя деления?

Обозначим многочлен, являющийся частным, буквой B, а остаток — все так же буквой C. Тогда

$$x^4 - 1 = (x + 1)\,B + C.$$

Зная, что для остатка C получается одно и то же его истинное значение при замене x любым числом, положим $x = -1$. Это значение x тем удобно, что оно не потребует от нас вычисления значения частного B, так как все равно при $x = -1$ выражение $(x + 1)\,B$ обратится в нуль (за счет первого сомножителя).

Имеем: $(-1)^4 - 1 = 0 + C$, или $1 - 1 = C$. Отсюда $C = 0$. Оказалось, что остаток равен нулю. Это значит, что $x^4 - 1$ делится без остатка на $x + 1$. Проверьте делением!

* * *

Теперь можно решить и более общую задачу.

При каких условиях двучлен $x^m + 1$ делится на $x + 1$? (m — целое положительное).

Решение. Пусть частное B, а остаток C. Имеем:

$$x^m + 1 = (x + 1)\,B + C.$$

Положим $x = -1$, тогда $(-1)^m + 1 = C$. Ясно, что если m — четное ($m = 2n$), то $C = 2$; если же m — нечетное ($m = 2n + 1$), то $C = 0$.

Следовательно, если m — четное ($m = 2n$), то $x^m + 1$, или $x^{2n} + 1$ не делится на $x + 1$, если же m — нечетное ($m = 2n + 1$), то $x^m + 1$, или $x^{2n+1} + 1$, делится на $x + 1$. Частное, как нетрудно убедиться, будет состоять из убывающих степеней x с чередующимися знаками, так что имеем следующую общую формулу:

$$x^{2n+1} + 1 = (x + 1)\,(x^{2n} - x^{2n-1} + x^{2n-2} - \dots - x + 1).$$

Что касается двучлена $x^m - 1$, то на $x - 1$ он делится при любом целом положительном m, а на $x + 1$ делится только при m четном ($m = 2n$).

Убедитесь в этом самостоятельно.

Для выяснения величины остатка (C) от деления двучлена вида $x^m + a^m$ на $x + a$ следует в тождестве $x^m + a^m = (x + a)\,B + C$ положить $x = -a$.

Применяя соответствующие рассуждения, нетрудно прийти к следующим выводам:

$$\left.\begin{array}{ll}
x^{2n} + a^{n} & \text{не делится ни на } x + a, \text{ ни на } x - a; \\
x^{2n+1} + a^{2n+1} & \text{делится на } x + a, \text{ но не делится на } x - a; \\
x^{2n} - a^{2n} & \text{делится как на } x + a, \text{ так и на } x - a; \\
x^{2n+1} + a^{2n+1} & \text{не делится на } x + a, \text{ но делится на } x - a.
\end{array}\right\}\quad (***)$$

Напоминаю, что в случае делимости $x^m \pm a^m$ на $x + a$ или на $x - a$ делятся и целые числа, получающиеся в качестве делимого и делителя при замене букв a и x целыми числами.

Задача. Не вычисляя выражения $11^{10} - 1$, доказать, что оно делится на 100.

288. Старое и новое о делимости на 7

Почему-то число 7 очень полюбилось народу и вошло в его песни и поговорки:

Семь раз примерь, один раз отрежь.

Семь бед, один ответ.

Семь пятниц на неделе.

Один с сошкой, а семеро с ложкой.

У семи нянек дитя без глазу.

Было у тещеньки семеро зятьев…

Число 7 богато не только поговорками, но и разнообразными признаками делимости. Два признака делимости на 7 (в объединении с другими числами) вы уже знаете. Имеется также несколько индивидуальных признаков делимости на 7.

Выбирайте для себя любой, какой покажется наиболее интересным, из следующих.

Первый признак делимости на 7. Возьмем для испытания число 5236. Запишем это число следующим образом: $10^2 \times 5 + 10^2 \times 2 + 10 \times 3 + 6$ (так называемая «систематическая» форма записи числа), и всюду основание 10 заменим основанием 3[1]: $3^2 \times 5 + 3^2 \times 2 + 3 \cdot 3 + 6 = 168$.

Если получившееся число делится / не делится на 7, то и данное число делится / не делится на 7.

Так как 168 делится на 7, то и 5236 делится на 7.

Доказательство. Пусть $a_{m-1}, a_{m-2}, \ldots, a_2, a_1, a_0$ — цифры последовательных разрядов m-значного числа N, тогда

$$N = 10^{m-1}a_{m-1} + 10^{m-2}a_{m-2} + \ldots + 10^2 a_2 + 10a_1 + a_0,$$
$$P = 3^{m-1}a_{m-1} + 3^{m-2}a_{m-2} + \ldots + 3^2 a_2 + 3a_1 + a_0.$$

Вычтем из первого выражения второе:

$$N - P = (10^{m-1} - 3^{m-1})\, a_{m-1} + (10^{m-2} - 3^{m-2})\, a_{m-2} + \\ + \ldots + (10^2 - 3^2)\, a_2 + (10 - 3)\, a_1.$$

На основании формул (***) и замечания 4 из задачи 287 можно утверждать, что все двучлены в скобках делятся на $10 - 3 = 7$. Следовательно, если при этом вычитаемое P делится / не делится на 7, то и уменьшаемое N делится / не делится на 7, а также, если уменьшаемое N делится / не делится на 7, то и вычитаемое P делится / не делится на 7.

Видоизменение первого признака делимости на 7. Умножьте первую слева цифру испытуемого числа на 3 и прибавьте следующую цифру; результат умножьте на 3 и прибавьте следующую цифру и т. д. до последней цифры. Для упрощения после каждого действия разрешается из результата вычитать 7 или число, кратное 7.

Если окончательный результат делится / не делится на 7, то и данное число делится / не делится на 7.

---

[1] Другими словами, прочтем число так, как будто оно записано не в десятичной, а в *троичной* системе, не смущаясь тем, что цифр, отличных от 0, 1 и 2, в троичной системе быть не должно.

Пример. Определим делимость числа 48 916 на 7. Умножаем первую слева цифру на 3:

$$4 \times 3 = 12.$$

Для дальнейших расчетов число 12 можно заменить числом 5, которое получается от уменьшения 12 на 7. Заменяя число a числом b, которое отличается от a на 7 или на число, кратное 7, будем ставить между ними значок =. Запись первого действия примет вид $4 \times 3 = 12 = 5$. Затем прибавляем к 5 вторую цифру 8 и снова делаем соответствующую замену: $5 + 8 = 13 = 6$.

Далее:

$6 \times 3 = 18 = 4$, $\quad 4 + 9 = 13 = 6$, $\quad 6 \times 3 = 18 = 4$,
$4 + 1 = 5$, $\quad 5 \times 3 = 15 = 1$, $\quad 1 + 6 = 7$.

Окончательный результат 7. Следовательно, число 48 916 делится на 7.

Преимущество этого правила в том, что оно легко применяется в уме. Разберитесь теперь в его доказательстве.

Доказательство. Пусть

$$N = 10^{m-1}a_{m-1} + 10^{m-2}a_{m-2} + \ldots + 10^2a_2 + 10a_1 + a_0.$$

Действуя в соответствии с правилом, получаем последовательно:

$$3a_{m-1} + a_{m-2},$$
$$3^2a_{m-1} + 3a_{m-2} + a_{m-3},$$
$$3^3a_{m-1} + 3^2a_{m-2} + 3a_{m-3} + a_{m-4},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$P = 3^{m-1}a_{m-1} + 3^{m-2}a_{m-2} + \ldots + 3a_1 + a_0.$$

Найдем разность чисел N и P:

$$N - P = a_{m-1}\,(10^{m-1} - 3^{m-1}) +$$
$$+ a_{m-2}\,(10^{m-2} - 3^{m-2}) + \ldots + a_1\,(10 - 3).$$

Так как m — число целое положительное (число цифр), то все биномы в скобках делятся на $10 - 3 = 7$ (см. формулы (***)

и замечание 4 в задаче 287). Следовательно, делимость числа P на 7 связана с делимостью числа N на 7.

Замечание. Любопытно, что окончательный результат, уменьшенный на 7 или на 14, показывает остаток от деления данного числа N на 7. Проверьте!

Второй признак делимости на 7. В этом признаке нужно действовать точно так же, как и в предыдущем, с той лишь разницей, что умножение следует начинать не с крайней левой цифры данного числа, а с крайней правой и умножать не на 3, а на 5.

Пример. Делится ли на 7 число 37 184?

$4 \times 5 = 20 = 6$, $6 + 8 = 14 = 0$, $0 \times 5 = 0$, $0 + 1 = 1$,
$1 \times 5 = 5$; прибавление цифры 7 можно пропустить;
$5 \times 5 = 25 = 4$, $4 + 3 = 7 = 0$. Число 37 184 делится на 7.

Доказательство. Пусть

$$N = 10^{m-1}a_{m-1} + 10^{m-2}a_{m-2} + \ldots + 10^2a_2 + 10a_1 + a_0.$$

Действуя в соответствии с указанным признаком, получаем последовательно:

$5a_0 + a_1$,
$5^2a_0 + 5a_1 + a_2$,
$5^3a_0 + 5^2a_1 + 5a_2 + a_3$,
....
$P = 5^{m-1}{}_0 + 5^{m-2}a_1 + \ldots + 5a_{m-2} + a_{m-1}$.

Умножим обе части последнего равенства на 10^{m-1} и из полученного результата вычтем N:

$$10^{m-1}P = 50^{m-1}a_0 + 10 \times 50^{m-2}a_1 + 10^{m-2} \times 50a_{m-2} + 10^{m-1}a_{m-1},$$
$$10^{m-1}P - N = a_0\,(50^{m-1} - 1) + 10a_1\,(50^{m-2} - 1) + 10^{m-2}a_{m-2}\,(50 - 1).$$

Все двучлены в скобках делятся на $50 - 1 = 49$, значит, и на 7, но 10^{m-1} не делится на 7. Следовательно, делимость на 7 числа N связана с делимостью на 7 числа P.

Третий признак делимости на 7. Этот признак менее легок для осуществления в уме, но он тоже очень интересен.

Удвойте последнюю цифру и *вычтите* вторую справа, удвойте результат и *прибавьте* третью справа и т. д., чередуя вычитание и сложение и уменьшая каждый результат, где возможно, на 7 или на число, кратное 7. Если окончательный результат делится / не делится на 7, то и испытуемое число делится / не делится на 7.

Проверьте этот признак на числах, а кто пожелает, тот сам выполнит и доказательство. Для числа общего вида оно, правда, несколько затруднительно, поэтому выполните его хотя бы для числа четырехзначного или пятизначного.

289. Распространение признака на другие числа

Изложенные выше три признака делимости чисел на 7 по своему методу похожи на известные условия делимости чисел на 3 и на 9. Там и тут из цифр данного числа N при помощи простых арифметических действий составляется некоторое новое число P, от делимости которого на данный делитель зависит и делимость данного числа. Число P составляется всякий раз так, что разность $N - P$ (или, может быть, сумма $N + P$) делится на данный делитель. Основа метода — делимость двучленов $a^n + b^n$ на $a + b$ при нечетном n и $a^n - b^n$ на $a \pm b$ при четном n.

Применяя тот же метод рассуждений, можно убедиться в справедливости следующего любопытного признака делимости на 13, 17 и 19.

Для определения делимости данного числа на 13, 17 или 19 нужно умножить *крайнюю левую* цифру испытуемого числа соответственно на 3, 7 или 9 и *вычесть* следующую цифру; результат опять умножить соответственно на 3, 7 или 9 и *прибавить* следующую цифру и т. д., чередуя вычитания и прибавления последующих цифр после каждого умножения. После каждого действия результат можно уменьшить или увеличить соответственно на число 13, 17, 19 или кратное ему.

Если окончательный результат делится / не делится на $\left\{\begin{matrix} 13 \\ 17 \\ 19 \end{matrix}\right.$, то делится / не делится и данное число.

Пример 1. Делится ли число 2 075 427 на 19?

Применяем правило:

$$2 \times 9 = 18 = -1$$

(если не желательно вводить действия с отрицательными числами, то можно оставить 18, не вычитая из него 19);

$$-1 - 0 = -1, -1 \times 9 = -9, -9 + 7 = -2,$$
$$-2 \times 9 = -18 = 1;$$
$$1 - 5 = -4, -4 \times 9 = -36 = 2, 2 + 4 = 6,$$
$$6 \times 9 = 54 = 16;$$
$$16 - 2 = 14 = -5, -5 \times 9 = -45 = 12,$$
$$12 + 7 = 19 = 0.$$

Делится.

Пример 2. Делится ли число 81 452 на 13?

Применяем правило:

$$\begin{array}{ll} 8 \times 3 = 24 = -2, & -2-1 = -3; \\ -3 \times 3 = -9, & -9 + 4 = -5; \\ -5 \times 3 = -15 = -2, & -2-5 = -7 = 6, \\ 6 \times 3 = 18 = 5; & 5 + 2 = 7. \end{array}$$

Не делится. Остаток 7.

Доказательство этого признака однотипно с изложенным выше доказательством признаков делимости на 7.

290. Обобщенный признак делимости

Мысль о рассечении числа на грани с последующим их сложением для определения делимости данного числа оказалась очень плодотворной и привела к единообразному признаку делимости многозначных чисел на довольно обширную группу простых чисел. Одной из групп «счастливых» делителей будут все целые множители p числа $d = 10^n + 1$, где $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$ (при больших значениях n теряется практический смысл признака).

При $n = 1, d = 11, \quad p = 11;$
» $n = 2, d = 101, \quad p = 101;$
» $n = 3, d = 1001, \quad p = 7, 11$ и $13;$
» $n = 4, d = 10\,001, \quad p = 73$ и $137.$

Для определения делимости какого-либо числа на любое из этих чисел p нужно:

1) рассечь данное число справа налево (от единиц) на грани по n цифр (каждому p соответствует свое n; крайняя левая грань может иметь цифр меньше n);

2) сложить грани через одну, начиная с крайней правой;

3) сложить остальные грани;

4) из большей суммы вычесть меньшую.

Если результат делится / не делится на p, то делится / не делится и данное число.

Так, для определения делимости числа на 11 ($p = 11$) рассекаем число на грани по одной цифре ($n = 1$). Поступая далее, как указано, приходим к известному признаку делимости на 11. При определении делимости числа на 7, 11 или 13 ($p = 7, 11, 13$) отсекаем по три цифры ($n = 3$). При определении делимости числа на 73 и 137 отсекаем по четыре цифры ($n = 4$).

Выясним, например, делимость пятнадцатизначного числа 837 362 172 504 831 на 73 и на 137 ($p = 73, 137, n = 4$).

Разбиваем число на грани: 837|3621|7250|4831.

Складываем грани через одну:

$$\begin{array}{r} 4831 \\ +\,3621 \\ \hline 8452 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 7250 \\ +\;\;837 \\ \hline 8087 \end{array}$$

Вычитаем из большей суммы меньшую:

$$8452 - 8087 = 365.$$

Замечаем, что 365 делится на 73, но не делится на 137; то же можно сказать и о данном числе.

Второй группой «счастливых» делителей будут все целые множители p числа $d = 10^n - 1$, где $n = 1, 3, 5, 7,\ldots$ Ограничиваемся нечетными значениями n, потому что при n четном

($n = 2m$) выражение $10^{2m} - 1$ разлагается на множители как разность квадратов, а делители вида $10^m + 1$ мы только что рассматривали.

Число $d = 10^n - 1$ дает следующие делители:

при $n = 1$, $d = 9$, $p = 3$;
» $n = 3$, $d = 999$, $p = 37$;
» $n = 5$, $d = 99\,999$, $p = 41$; 271 и т д.

Для определения делимости какого-либо числа на любое из этих чисел p нужно:

1) рассечь данное число справа налево (от единиц) на грани по n цифр (каждому p соответствует свое n; крайняя левая грань может иметь цифр меньше n);

2) все грани сложить.

Если полученный результат делится / не делится на p, то делится / не делится и данное число.

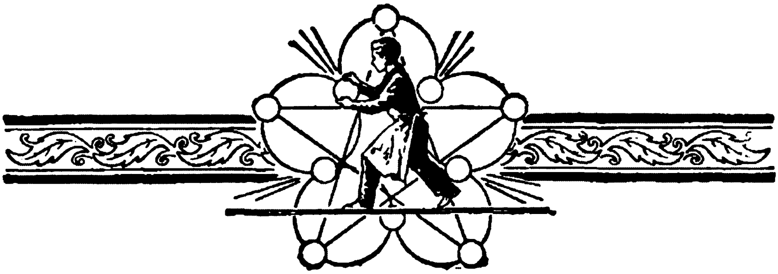
Заметим попутно, что число, все n разрядов которого — единицы (начиная с $n = 3$), также делится на соответствующее p. Так, 111 делится на 37, 11 111 делится на 41 и на 271.

291. Курьез делимости

В заключение главы хочется представить вам четыре изумительных десятизначных числа:

2 438 195 760; 4 753 869 120;
3 785 942 160; 4 876 391 520.

В каждом из них есть все цифры от 0 до 9, но каждая цифра только по одному разу и каждое из этих чисел делится на 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17 и 18.



Глава двенадцатая

КРОСС-СУММЫ И ВОЛШЕБНЫЕ КВАДРАТЫ

А. Кросс-суммы

Возьмем все целые числа от 1 до 9 и попытаемся расположить их в два ряда так, чтобы суммы чисел в каждом ряду были равны между собой.

Прикинем, возможно ли такое распределение указанных чисел в два отдельных ряда?

Сумма всех целых чисел от 1 до 9 равна 45. Если каждое из этих чисел будет включаться только в один из двух рядов, то сумма чисел каждого отдельного ряда, по условию, должна составить половину суммы всех данных чисел. Но 45 не дробится на два равных целых числа, следовательно, распределение всех целых чисел от 1 до 9 в два отдельных ряда с равными суммами невозможно. Однако поставленной цели можно достигнуть, если допустить расположение чисел в два пересекающихся ряда, например, так:

```
    5
    9
3 7 1 8 4 |23 — сумма
    6
    2
   ---
   23 — сумма
```

При сложении единица включилась в сумму чисел того и другого ряда.

Пересекающиеся ряды чисел с одинаковыми суммами будем называть *кросс-суммами* по аналогии с кроссвордами. Направления расположения чисел указываются заранее, чаще всего вдоль линий какой-нибудь симметричной фигуры; числа, помещаемые в точках пересечения двух или нескольких линий, включаются в сумму чисел вдоль каждой из этих линий.

Решите предложенные здесь задачи на составление кросс-сумм, а потом придумывайте их сами. Стремитесь при этом к симметричному расположению рядов чисел. Имейте в виду, что любая задача о кросс-суммах имеет, как правило, не одно решение.

292. Интересные группировки

В десяти кружках, расположенных вдоль сторон и вдоль радиусов равностороннего треугольника (рис. 173), можно разместить десять порядковых чисел от 1 до 10 так, что сумма чисел, расположившихся по сторонам и углам *каждого* из трех маленьких треугольников, будет равна 28. Вариант возможного решения предложен на средней схеме рис. 173. Здесь число 1, помещенное в центральный кружок, участвует в каждой из трех сумм:

$$1 + 2 + 7 + 8 + 6 + 4 = 1 + 4 + 6 + 9 + 5 + 3 =$$
$$1 + 3 + 5 + 10 + 7 + 2 = 28.$$

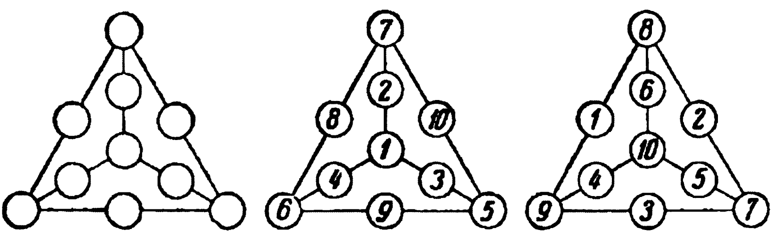


Рис. 173. Два возможных варианта решения

Эти же десять чисел можно и по-иному разместить в кружках треугольника, например, как во втором варианте на рис. 173.

Теперь сумма чисел, расположившихся по сторонам и углам маленьких треугольников, для *каждого* из них равна 38:

$$10 + 6 + 8 + 1 + 9 + 4 = 10 + 4 + 9 + 3 + 7 + 5 =$$
$$= 10 + 5 + 7 + 2 + 8 + 6 = 38.$$

Но самое интересное в том, что из тех же десяти целых чисел можно образовывать все новые и новые их группировки, такие, что для каждого из маленьких треугольников будут получаться суммы и в 29 единиц, и в 30 единиц, и в 31, 32, 33, 34, 35, 36 и 37 единиц!

Как в каждом из этих девяти случаев будут располагаться в кружках треугольника данные числа?

Вместо того чтобы вписывать числа в кружки, а потом стирать их, приготовьте 10 фишек произвольной формы, напишите на них числа и перемещайте их с кружка на кружок, пока не добьетесь желаемого результата.

293. «Звездочка»

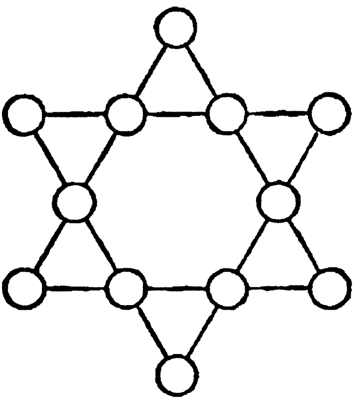


Рис. 174

Приготовьте двенадцать фишек, пронумеруйте их числами от 1 до 12 и расставьте по кружкам шестиконечной звездочки (рис. 174) так, чтобы сумма чисел в четырех кружках каждого из шести лучей равнялась 26.

294. «Кристалл»

На рис. 175 показана часть фантастической «кристаллической решетки», «атомы» которой условно соединены в десять рядов по три «атома» в каждом (соединения «атомов» в ряды показаны на рис. 175 линиями). Подберите тринадцать целых чисел, из них одиннадцать различных и два одинаковых, и впишите их в «атомы» так, чтобы сумма чисел в каждом ряду (вдоль указанных на рисунке линий) равнялась 20.

Наименьшее из искомых чисел равно 1, а наибольшее 15.

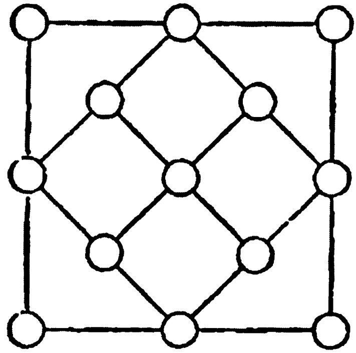


Рис. 175. «Кристаллическая решетка»

295. Украшение для витрины

Для витрины магазина изделий из самоцветных камней мастер изготовил пятиконечную звезду с проволочными ободками и круглыми оправами (рис. 176).

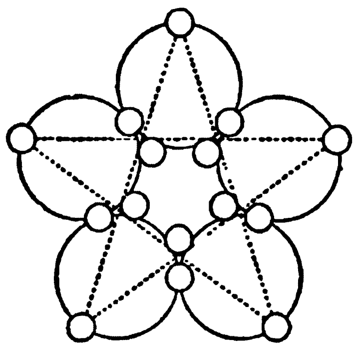


Рис. 176. Схема ободков и оправ

В оправы он вставил всевозможные самоцветные камни (на рисунке не изображенные). В одну оправу — 1 камень, в другую — 2 камня, в третью — 3 и т. д. по порядку до 15 камней включительно.

Но разместил мастер камни так искусно, что общее число камней в каждых пяти оправах, расположенных вдоль одного ободка, равно 40, и общее число камней, размещенных в оправах, расположенных на пяти концах звезды, также равно 40.

Найдите распределение камней по пятнадцати оправам, удовлетворяющее указанным условиям.

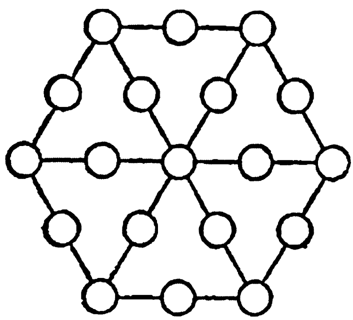


Рис. 177. Шестиугольник для игры

296. Кому раньше удастся?

Приготовьте два комплекта фишек. Фишки каждого комплекта пронумеруйте числами от 1 до 19.

Перерисуйте для себя и для товарища шестиугольник, изображенный на рис. 177. Дайте товарищу комплект фишек и пригласите его принять участие в небольшом состязании. Пусть каждый из вас расставит свои фишки по кружкам шестиугольника так, чтобы сумма чисел вдоль каждой стороны и вдоль каждого радиуса шестиугольника равнялась у одного из вас 22, а у другого 23. Трудность совершенно одинаковая.

Кому из вас раньше удастся решить задачу?

Помните, что у одного из вас должно получиться 12 равных сумм по 22 единицы каждая, а у другого тоже 12 сумм, но по 23 единицы каждая.

297. «Планетарий»

В малом «планетарии» все «планеты» расположены по четыре на каждой «орбите» и по четыре вдоль радиусов (рис. 178), а в большом «планетарии» — на пяти «орбитах» и вдоль пяти радиусов по пять «планет» (рис. 179). Вес каждой «планеты» «малого планетария» выражается одним из целых чисел от 1 до 16, а вес каждой «планеты» «большого планетария» выражается одним из целых чисел от 1 до 25. Не нарушая указанной схемы, расположите «планеты» так, чтобы в каждом ряду вдоль радиуса и по каждой орбите сумма весов «планет» была равна 34 для малого «планетария» и 65 для большого «планетария». Возможны различные решения.

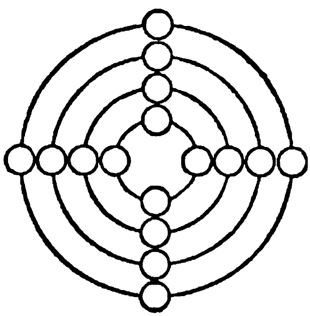


Рис. 178. Малый «планетарий»

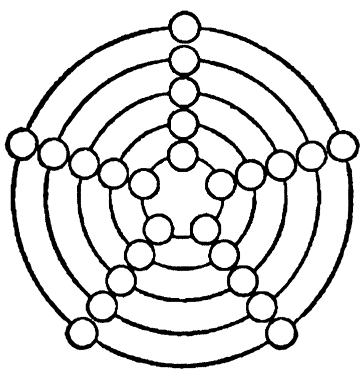


Рис. 179. Большой «планетарий»

298. «Орнамент»

Перед вами своеобразный орнамент, состоящий из 16 маленьких треугольников. Некоторые группы из соседних четырех маленьких треугольников образуют большие треугольники. На рисунке орнамента (рис. 180) нетрудно подметить шесть больших треугольников, «вплетенных» один в другой.

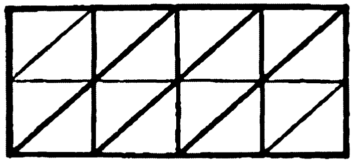


Рис. 180. «Орнамент»

Впишите в каждый маленький треугольник орнамента одно из целых чисел от 1 до 16 (не повторяя их) таким образом, чтобы сумма чисел в любом из шести больших треугольников составляла ровно 34.

Б. Волшебные квадраты

299. Пришельцы из Китая и Индии

Одна из наиболее древних и наиболее совершенных кросс-сумм — так называемые волшебные (или магические) квадраты.

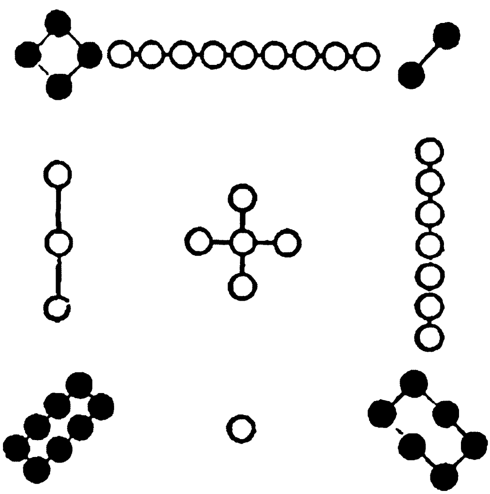


Рис. 181. Старейший волшебный квадрат

Придуманы волшебные квадраты впервые, по-видимому, китайцами, так как самое раннее упоминание о них встречается в китайской книге, написанной за 4000–5000 лет до нашей эры.

Старейший в мире волшебный квадрат китайцев представлен на рис. 181. Черными кружками в этом квадрате изображены четные (женственные) числа, белыми — нечетные (мужественные) числа. В обычной записи он не так эффектен:

4	9	2
3	5	7
8	1	6

И все же какой это великолепный образец кросс-сумм! Девять порядковых чисел размещены в девяти клетках квадрата так, что суммы чисел вдоль каждой строки, каждого столбца и каждой из двух диагоналей одинаковы (основное свойство волшебного квадрата).

Более поздние сведения о волшебных квадратах, относящиеся уже к I веку, получены из Индии. Вот один из таких древнеиндусских памятников почти двухтысячелетней давности:

1	14	15	4
12	7	6	9
8	11	10	5
13	2	3	16

Здесь шестнадцать порядковых чисел размещены в шестнадцати клетках квадрата так, что выполняется основное свойство волшебного квадрата. Действительно:

$$
+\begin{cases} 1 + 14 + 15 + \ \ 4 = 34, \\ 12 + \ \ 7 + \ \ 6 + \ \ 9 = 34, \\ \ \ 8 + 11 + 10 + \ \ 5 = 34, \\ 13 + \ \ 2 + \ \ 3 + 16 = 34 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{matrix} 1 + 7 + 10 + 16 = 34, \\ 13 + 11 + 6 + 4 = 34 \end{matrix}
$$

$$
\overline{\quad 34 \quad 34 \quad 34 \quad 34 \quad}
$$

Каждое число волшебного квадрата участвует в двух суммах, а числа, расположенные по диагоналям, даже в трех, и все эти суммы равны между собой!

Недаром в ту далекую эпоху суеверий древние индусы, а следом за ними и арабы приписывали подобным числовым сочетаниям таинственные и магические свойства.

Вся эта своеобразная мозаика чисел с ее постоянством сумм действительно придает волшебному квадрату «волшебную» силу произведения искусства. И это привлекло внимание не только математиков, но и художников.

В Западную Европу из Индии волшебный квадрат пришел лишь в начале XVI века и так очаровал выдающегося немецкого художника, гравера и немного математика Альбрехта Дюрера, что тот даже воспроизвел его (в несколько измененном виде) в одной из своих гравюр («Меланхолия», 1514 г.).

Очарование этого волшебного квадрата не только в постоянстве сумм, которое всего лишь его основное свойство. Подобно тому, как в художественном произведении находишь тем больше новых привлекательных сторон, чем больше в него вглядываешься, так и в этом произведении математического искусства таится еще немало красивых свойств, помимо основного.

Укажем еще шесть дополнительных свойств приведенного выше шестнадцатиклеточного волшебного квадрата:

1) Сумма чисел, расположенных по углам нашего волшебного квадрата, равна 34, то есть тому же числу, что и сумма чисел вдоль каждого ряда квадрата.

2) Суммы чисел в каждом из маленьких квадратов (в 4 клетки), примыкающих к вершинам данного квадрата, и в таком же центральном квадрате тоже одинаковы и каждая из них равна 34:

$$1 + 14 + 12 + 7 = 34,$$
$$8 + 11 + 13 + 2 = 34,$$
$$10 + 5 + 3 + 16 = 34,$$
$$15 + 4 + 6 + 9 = 34,$$
$$7 + 6 + 11 + 10 + 34.$$

3) В каждой строке квадрата есть пара рядом стоящих чисел, сумма которых 15, и еще пара тоже рядом стоящих чисел, сумма которых 19.

4) Подсчитайте-ка теперь сумму квадратов чисел отдельно в двух крайних строках и в двух средних:

$$1^2 + 14^2 + 15^2 + 4^2 = 438 \text{ и } 13^2 + 2^2 + 3^2 + 16^2 = 438,$$
$$12^2 + 7^2 + 6^2 + 9^2 = 310 \text{ и } 8^2 + 11^2 + 10^2 + 5^2 = 310.$$

Как видите, получились попарно равные суммы!

5) Нетрудно убедиться, что аналогичным свойством обладают и столбцы чисел. Суммы квадратов чисел двух крайних столбцов равны между собой, и суммы квадратов чисел двух средних столбцов тоже одинаковы.

6) Если в данный квадрат вписать еще один квадрат с вершинами в серединах сторон данного квадрата, то:

1	14	15	4
12	7	6	9
8	11	10	5
13	2	3	16

а) сумма чисел, расположенных вдоль одной пары противоположных сторон вписанного квадрата, равна сумме чисел, расположенных вдоль другой пары противоположных его сторон, и каждая из этих сумм равна опять-таки числу 34:

$$12 + 14 + 3 + 5 = 15 + 9 + 8 + 2 = 34;$$

б) еще интереснее то, что равны между собой даже суммы квадратов и суммы кубов этих чисел:

$$12^2 + 14^2 + 3^2 + 5^2 = 15^2 + 9^2 + 8^2 + 2^2;$$
$$12^3 + 14^3 + 3^3 + 5^3 = 15^3 + 9^3 + 8^3 + 2^3.$$

Если все столбцы волшебного квадрата сделать строками, сохраняя их чередование, то есть числа первого столбца в той же последовательности расположить в виде первой строки, числа второго столбца в виде второй строки и т. д., то квадрат останется «волшебным» с теми же своими свойствами.

При обмене местами отдельных строк или столбцов волшебного квадрата некоторые из вышеперечисленных его свойств могут исчезнуть, но могут и все сохраниться и даже появиться новые. Например, поменяем местами первую и вторую строки данного квадрата:

12	7	6	9
1	14	15	4
8	11	10	5
13	2	3	16

Суммы чисел вдоль строк и столбцов, конечно, не изменились, но суммы чисел вдоль диагоналей стали иными, не равными 34. Волшебный квадрат потерял часть своих основных свойств, стал «неполным волшебным квадратом».

Продолжая обменивать местами строки и столбцы квадрата, вы будете получать все новые и новые волшебные квадраты из 16 чисел. Некоторые из них снова будут полностью обладать основными свойствами.

Задача. Обменивая местами строки и столбцы данного волшебного квадрата, добейтесь такого расположения чисел, чтобы

1) выполнялись основные свойства волшебного квадрата (были бы равны суммы вдоль каждой строки, столбца и диагонали);

2) суммы квадратов чисел вдоль *диагоналей* были бы одинаковыми;

3) суммы кубов чисел вдоль *диагоналей* тоже были бы одинаковыми.

300. Как самому составить волшебный квадрат?

Если некоторое количество порядковых чисел, например все целые числа от 1 до 16 или от 1 до 9, от 1 до 25, от 1 до 100 и т. д., расположены в форме квадрата так, что суммы чисел вдоль каждой строки, каждого столбца и каждой диагонали квадрата *одинаковы*, то такой квадрат, как было сказано, называется магическим, или *волшебным*.

Идея составления волшебного квадрата, возникшая около семи тысячелетий назад, постепенно увлекла как любителей математических развлечений, так и специалистов-математиков. Начались и до сих продолжаются поиски теоретических обоснований этого удивительного и красивого явления в мире чисел. За сотни лет придуманы сотни остроумных способов и правил составления различных волшебных квадратов.

Хотите познакомиться с некоторыми наиболее интересными из них? В таком случае будем действовать подобно радиолюбителям. Еще не зная во всех подробностях теории радиоприема, они уже умеют собирать радиоприемник из готовых деталей по готовым схемам. Наши «детали» — числа, а «панель» (доска, на которой монтируются детали) — квадрат с клетками. «Смонтируем» шестнадцатиклеточный волшебный квадрат по следующей схеме.

Первый шаг. Расположить в шестнадцати клетках все целые числа от 1 до 16 по порядку:

I	1	2	3	4
II	5	6	7	8
III	9	10	11	12
IV	13	14	15	16
	1	2	3	4

Второй шаг. Порядок следования чисел в строках III и IV изменить на обратный и обменять местами строки II и III:

I	1	2	3	4
II	12	11	10	9
III	5	6	7	8
IV	16	15	14	13
	1	2	3	4

Третий шаг. Порядок следования чисел во втором и третьем столбцах изменить на обратный:

I	1	15	14	4
II	12	6	7	9
III	5	11	10	8
IV	16	2	3	13
	1	2	3	4

Четвертый шаг. Порядок следования чисел в строках III и IV изменить на обратный:

1	15	14	4
12	6	7	9
8	10	11	5
13	3	2	16

Волшебный квадрат готов! Можете проверить. Каждая из интересующих нас сумм равна 34 (это число называют *константой* волшебного квадрата).

Дальше вы найдете еще несколько способов составления шестнадцатиклеточного волшебного квадрата (см. задачи 301, 307, 308). Пользуясь любым из них или указанной здесь схемой, составляйте квадраты с постоянными суммами не только из шестнадцати порядковых чисел, но и из шестнадцати любых целых чисел, отличающихся друг от друга последовательно на одно и то же число. Расширяя первоначальное определение волшебного квадрата, будем и такие квадраты тоже называть волшебными.

Задача. Составьте волшебный квадрат из шестнадцати нечетных чисел от 1 до 31. Потребуем еще, чтобы этот волшебный квадрат обладал и некоторыми дополнительными свойствами, например:

1) должна быть одинаковой, равной числу 64 (константа квадрата), сумма чисел, расположенных: а) по четырем углам всего шестнадцатиклеточного квадрата; б) по четырем углам четырех девятиклеточных квадратов; в) по четырем углам девяти четырехклеточных квадратов, входящих в состав всего квадрата; г) по четырем углам шести прямоугольников длиной 4 клетки и шириной 2 клетки; д) вдоль каждой пары противоположных сторон вписанного квадрата с вершинами в серединах сторон данного квадрата;

2) суммы *квадратов* чисел в каких-либо двух строках должны быть равными между собой, и суммы квадратов чисел в других двух строках тоже должны быть равными между собой;

3) суммы квадратов чисел в каких-либо двух столбцах должны быть одинаковыми, и суммы квадратов чисел в двух других столбцах тоже должны быть одинаковыми.

Обменивая местами строки и столбцы в первоначально составленном волшебном квадрате, постройте квадрат, обладающий всеми требуемыми свойствами. Сделайте это!

301. На подступах к общим методам

Количеством клеток (чисел) в каждом ряду волшебного квадрата определяется его «порядок».

Волшебный квадрат *третьего порядка* имеет в каждом ряду три клетки, волшебный квадрат *четвертого порядка* имеет в каждом ряду четыре клетки и т. д.

Способ составления волшебного квадрата четвертого порядка, рассмотренный в предыдущей задаче, весьма индивидуален; он неприменим к квадратам других порядков. Пора познакомиться и с методами несколько более общими. Благополучнее всего дело обстоит с квадратами нечетного порядка. С них и начнем.

Квадраты нечетного порядка. Для квадратов нечетного порядка действительно можно указать *общий* и довольно простой метод их составления. Рассмотрим его на примере квадрата пятого порядка, а затем вы его без труда примените к квадратам третьего, седьмого и других нечетных порядков.

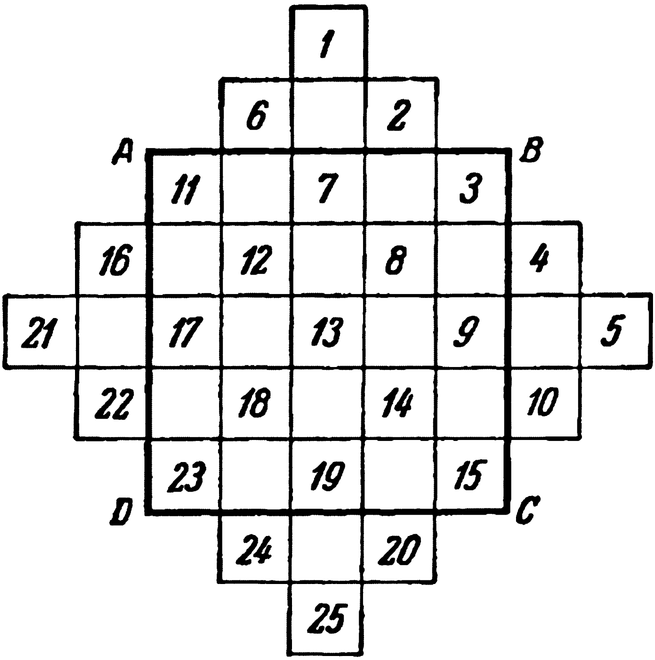


Рис. 182. Так начинаем построение волшебного квадрата пятого порядка

Строим квадрат *ABCD* (рис. 182) с 25 клетками и временно дополняем его до симметричной ступенчатой фигуры (изображенной на том же рисунке) со ступеньками в одну клетку.

В полученной фигуре располагаем по порядку косыми рядами сверху — вниз — направо 25 целых чисел от 1 до 25.

А теперь каждое число, оказавшееся вне квадрата *ABCD*, следует перенести вдоль того же ряда или столбца ровно на столько клеток от той клетки, которую оно занимает, каков порядок квадрата, в нашем примере — на пять.

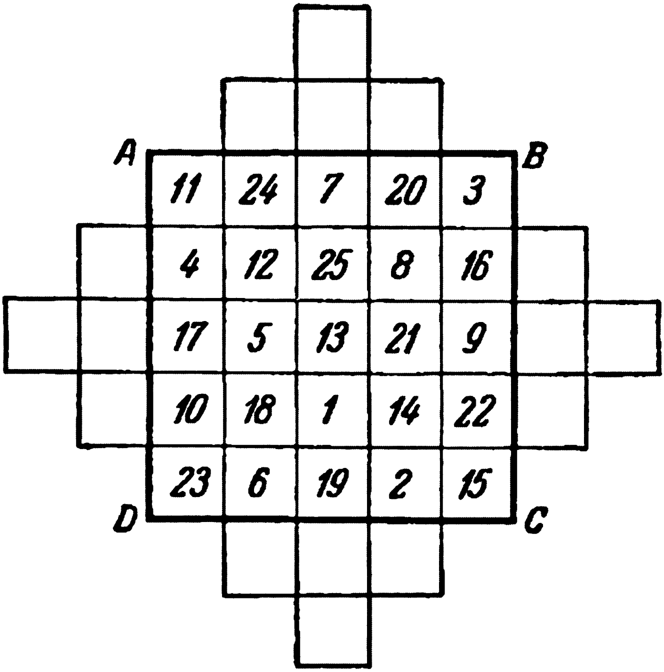


Рис. 183. Волшебный квадрат готов

Так, в соответствии с этим правилом число 5 нужно поместить в клетку под числом 18, а число 24 — выше числа 12; далее, 1 — ниже 13, а 25 — выше 13; 16 — правее 8, а 4 — левее 12 и т.д.

Окончательно получим волшебный квадрат, изображенный на рис. 183.

Нетрудно убедиться в том, что в получившемся квадрате выполняются основные свойства волшебного квадрата, то есть сумма чисел вдоль каждой диагонали, вдоль каждой вертикали и горизонтали одна и та же и равна константе квадрата — 65.

Здесь, как и в предыдущем случае, порядковые числа можно заменить любыми другими последовательными числами, но такими, чтобы разность между каждым последующим и предыдущим числами сохранялась неизменной.

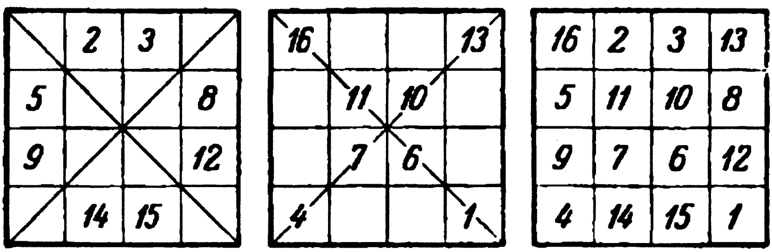
Задача. Сообразите, как применить описанный здесь прием составления волшебного квадрата в 25 клеток к составлению волшебных квадратов третьего и седьмого порядков.

Некоторые квадраты четного порядка. Сложнее обстоит дело с волшебными квадратами четного порядка. Способы их составления не обладают большой общностью.

Обратимся еще раз к квадрату четвертого порядка. Приготовим два квадрата по 16 клеток в каждом и проведем диагонали.

В клетки первого квадрата впишем данные числа по порядку, начиная с меньшего, пропуская пока те из них, которые приходятся на клетки, перечеркнутые диагоналями (рис. 184, *а*).

Пропущенные числа, начиная с самого большого из них (то есть с 16), разместим последовательно в порядке убывания по перечеркнутым клеткам второго квадрата (рис. 184, *б*)



а) б) в)

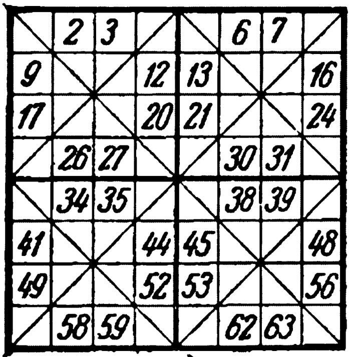
Рис. 184. Построение волшебного квадрата четвертого порядка

Наложив теперь один квадрат на другой таким образом, чтобы совместились их клетки, получим искомый волшебный квадрат четвертого порядка, который изображен на рис. 184, *в*.

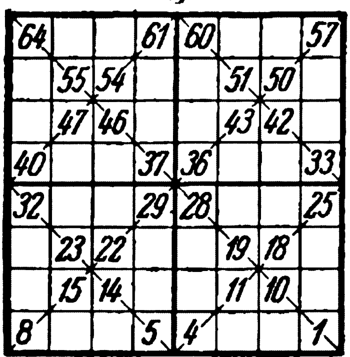
Тот же принцип с небольшим дополнением, примененный к размещению чисел в квадрат с 64 клетками, приводит к образованию волшебного квадрата восьмого порядка.

Нарисуем восемь квадратов по 16 клеток в каждом, проведем диагонали и составим из этих восьми квадратов два квадрата по 64 клетки.

Заполним клетки первого квадрата порядковыми числами, начиная с наименьшего и пропуская те из чисел, которые приходятся на перечеркнутые клетки (рис. 185, *а*). Пропущенные числа, начиная с большего, разместим в порядке убывания по перечеркнутым клеткам второго квадрата (рис. 185, *б*). Объединив оба квадрата в один, получим искомый волшебный квадрат восьмого порядка (рис. 185, *в*).



а)



б)

64	2	3	61	60	6	7	57
9	55	54	12	13	51	50	16
17	47	46	20	21	43	42	24
40	26	27	37	36	30	31	33
32	34	35	29	28	38	39	25
41	23	22	44	45	19	18	48
49	15	14	52	53	11	10	56
8	58	59	5	4	62	63	1

в)

Рис. 185. Построение волшебного квадрата восьмого порядка

Константа этого квадрата 260.

Казалось бы, найден метод конструирования волшебных квадратов четного порядка. Однако это не так. Составить волшебный квадрат шестого порядка тем же способом не удастся. С его конструированием гораздо больше хлопот.

4	9	2	22	27	20
3	5	7	21	23	25
8	1	6	26	19	24
31	36	29	13	18	11
30	32	34	12	14	16
35	28	33	17	10	15

а)

31	9	2	22	27	20
3	32	7	21	23	25
35	1	6	26	19	24
4	36	29	13	18	11
30	5	34	12	14	16
8	28	33	17	10	15

б)

Рис. 186. Построение волшебного квадрата шестого порядка

Нарисуем квадрат в 36 клеток и разделим его на 4 квадрата по 9 клеток (рис. 186, *а*). Числа от 1 до 9 разместим в левом верхнем квадрате по принципу составления квадрата нечетного порядка (см. ранее). По тому же принципу заполним числами и остальные три девятиклеточных квадрата: нижний правый — числами от 10 до 18, правый верхний — числами от 19 до 27 и, наконец, нижний левый — числами от 28 до 36 (рис. 186, *а*). После этого необходимо поменять местами числа 4, 5 и 8 с числами 31, 32, 35, и волшебный квадрат готов (рис. 186, *б*). Его константа 111.

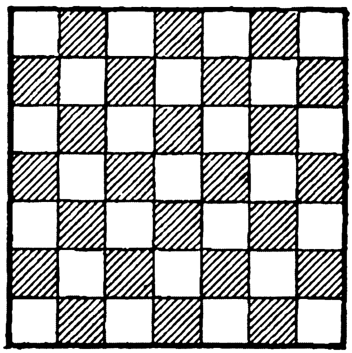


Рис. 187. Расставьте числа в белых клетках

302. Экзамен на смекалку

Расставьте в белых клетках квадрата, изображенного на рис. 187, все целые числа от 30 до 54 включительно так, чтобы сумма чисел в каждом из семи горизонтальных и семи вертикальных рядов равнялась 150, а сумма чисел вдоль каждой из двух диагоналей равнялась 300. Действуйте не наудачу, а попытайтесь придумать какую-нибудь схему расстановки данных чисел.

303. Нетрадиционный волшебный квадрат

Все числа традиционного волшебного квадрата непременно порядковые. В более общем случае клетки квадрата могут быть заполнены любыми числами.

Пусть в шестнадцати клетках квадрата размещены, как показано на рис. 188, все целые числа от 1 до 8, каждое по два раза. Переставьте эти числа так, чтобы сумма их в любом из горизонтальных, вертикальных и диагональных рядов, а также по углам квадрата равнялась 18. Мало этого. Ту же сумму 18 должны составлять: 1) числа любого квадрата из четырех смежных клеток; 2) числа, расположенные по углам любого квадрата из девяти смежных клеток, и ни одно число в каждой из этих сумм не должно повторяться.

1	2	3	4
5	6	7	8
8	7	6	5
4	3	2	1

Рис. 188. Переставив числа, получить волшебный квадрат

96	11	89	68
88	69	91	16
61	86	18	99
19	98	66	81

Рис. 189. Квадрат-«оборотень»

Добейтесь решения этой задачи путем проб, а может быть, придумаете схему.

* * *

Какой-то шутник составил довольно забавный нетрадиционный волшебный квадрат с константой $S = 264$ (рис. 189). Это квадрат-«оборотень».

Как вы думаете почему?

304. Что в центральной клетке?

Выясним теперь, какое число занимает центральную клетку волшебного квадрата с нечетным числом клеток. Рассмотрим два девятиклеточных волшебных квадрата, представленных на рис. 190. В обоих случаях число, стоящее в центральной клетке, равно $\frac{1}{3}S$, то есть одной трети константы квадрата.

4	9	2
3	5	7
8	1	6

$S=15$

49	54	47
48	50	52
53	46	51

$S=150$

Рис. 190. Число в центральной клетке равно $\frac{1}{3}S$

Обратимся к знакомому нам двадцатипятиклеточному волшебному квадрату (рис. 191).

11	24	7	20	3
4	12	25	8	16
17	5	13	21	9
10	18	1	14	22
23	6	19	2	15

$S=65$

Рис. 191. Число в центральной клетке равно $\frac{1}{5}S$

a_1	a_2	a_3
a_4	a_5	a_6
a_7	a_8	a_9

Рис. 192. Квадрат третьего порядка

Здесь число, стоящее в центральной клетке, равно $\frac{1}{5}S$, то есть одной пятой константы квадрата. Из наблюдений напрашивается предположение о такой закономерности: число, стоящее в центральной клетке волшебного квадрата с нечетным числом клеток, равно среднему арифметическому суммы чисел одного ряда. Но справедливость всякого свойства, подмеченного из наблюдений, можно считать окончательно установленной только после его проверки «для общего случая». Ограничимся пока «общим видом» девятиклеточного волшебного квадрата, представленным на рис. 192. Вместо чисел здесь пока буквы. Буквенными же равенствами будет выражено и основное свойство волшебного квадрата:

$$a_1 + a_2 + a_3 = S, \quad a_1 + a_4 + a_7 = S,$$
$$a_4 + a_5 + a_6 = S, \quad a_2 + a_5 + a_8 = S,$$
$$a_7 + a_8 + a_9 = S, \quad a_3 + a_6 + a_9 = S,$$
$$a_1 + a_5 + a_9 = S, \quad a_3 + a_5 + a_7 = S.$$

Докажите, что при этих условиях непременно

$$a_5 = \frac{S}{3}.$$

305. «Волшебные» произведения

Разновидностью упражнений с волшебным квадратом будет задача о заполнении клеток разграфленного квадрата неповторяющимися натуральными числами так, чтобы их *произведения* в каждой строке, каждом столбце и в обеих диагоналях были одинаковы. Из порядковых чисел такой квадрат еще никем не составлен, да, по-видимому, и не может быть составлен. Если же допустить произвольный выбор чисел, то среди бесчисленного множества натуральных чисел, конечно, найдутся подходящие.

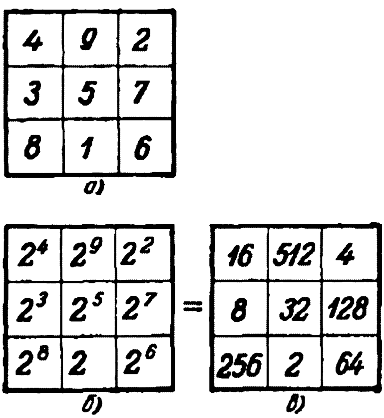


Рис. 193. Построение волшебного квадрата с постоянным произведением 2^{15}

Как же их подобрать?

Есть исчерпывающий способ составления какого-нибудь (какой выйдет!) квадрата с постоянным произведением. В основе этого способа лежит известное правило умножения степеней: при умножении степеней с одинаковыми основаниями основание остается тем же, а показатели степеней складываются. Например:

$$2^4 \times 2^3 \times 2^8 = 2^{4+3+8} \text{ или } 2^8 \times 2 \times 2^6 = 2^{8+1+6}.$$

В выбранном примере суммы показателей степеней будут одинаковы:

$$4 + 3 + 8 = 8 + 1 + 6,$$

следовательно, и произведения степеней будут одинаковыми:

$$2^4 \times 2^3 \times 2^8 = 2^8 \times 2 \times 2^6.$$

Теперь ясно, что если взять любое число, например 2, в качестве основания степени, а показателями степени сделать числа какого-либо волшебного квадрата с постоянной суммой, например такого, как на рис. 193, *а*, то полученные числа образуют волшебный квадрат с одинаковыми произведениями P (рис. 193, *б*).

Для этого квадрата произведение

$$P = 2^4 \times 2^3 \times 2^8 = 2^4 \times 2^9 \times 2^2 = 2^4 \times 2^5 \times 2^6 = \text{и т.д.} = 2^{15} = 32\,768.$$

Таким путем любой волшебный квадрат с постоянной суммой можно превратить в некоторый квадрат с постоянным произведением.

Для составления волшебных квадратов с постоянными произведениями можно предложить еще иную схему, не зависимую от квадратов с постоянными суммами.

Разложим a^3 на три множителя: $1 \times a \times a^2$. По-разному группируя эти три числа, нетрудно составить квадрат с постоянным произведением, равным a^3. Для этого заполним сначала данными множителями последовательно все клетки какой-нибудь диагонали квадрата, например снизу — вверх — направо (рис. 194, *а*). Эти же числа 1, a и a^2 разместим в оставшиеся свободные клетки еще по два раза каждое, *симметрично* относительно заполненной диагонали, причем так, чтобы в каждой строке и каждом столбце эти числа не повторялись (рис. 194, *а*).

a	1	a^2
a^2	a	1
1	a^2	a

а)

1	b^2	b
b^2	b	1
b	1	b^2

б)

a	b^2	a^2b
a^2b^2	ab	1
b	a^2	ab^2

в)

Рис. 194. Построение волшебных квадратов с постоянным произведением a^3, b^3, a^3b^3

Получился волшебный квадрат с постоянным произведением a^3, но он еще не отвечает поставленной цели, так как его клетки заполнены повторяющимися числами.

Проделаем то же самое с числами 1, b и b^2 с той только разницей, что первоначально расположим их вдоль другой диагонали квадрата, например сверху — вниз — направо (рис. 194, *б*). Наложим второй квадрат на первый и перемножим числа, попавшие в одну и ту же клетку (рис. 194, *в*). Произведение чисел в каждой строке, в каждом столбце и вдоль диагоналей постоянно и равно a^3b^3.

Заменяя a и b числами, лучше простыми (тогда наверняка не будет повторяющихся чисел), получим числовые волшебные квадраты с постоянными произведениями.

2	9	12
36	6	1
3	4	18

Рис. 195. $P = 216$

Пусть, например, $a = 2$, $b = 3$, тогда получим волшебный квадрат с произведением $P = 216$ (рис. 195).

Задача 1. Составьте волшебный квадрат третьего порядка с тремя параметрами a, b и c так, чтобы постоянное произведение равнялось $a^3b^3c^3$.

* * *

Для составления волшебного квадрата четвертого порядка с постоянными произведениями также можно предложить схему[1] (рис. 196, *а*). Здесь $P = ABCDabcd$.

Aa	Bd	Cb	Dc
Db	Cc	Ba	Ad
Bc	Ab	Dd	Ca
Cd	Da	Ac	Bb

а)

1	10	21	36
27	28	2	5
8	3	45	7
35	9	4	6

б)

Рис. 196. Формула и пример волшебного квадрата четвертого порядка

1	12	10
15	2	4
8	5	3

Рис. 197. Неполный квадрат третьего порядка

Придавая буквам числовые значения, например: $A = 1$, $B = 2$, $C = 7$, $D = 9$, $a = 1$, $b = 3$, $c = 4$, $d = 5$, получим квадрат с постоянным произведением $P = 7560$ (рис. 196, *б*).

* * *

Между прочим, один из неполных волшебных квадратов третьего порядка, а именно квадрат, представленный на рис. 197 (равны произведения чисел только в строках и столбцах), интересен еще любопытным дополнительным свойством:

$$8^2 + 5^2 + 3^2 = 7^2 + 7^2,$$
$$8^4 + 5^4 + 3^4 = 7^4 + 7^4.$$

Задача 2. Формула произведения чисел каждой строки и каждого столбца предыдущего неполного квадрата третьего порядка: a^3bc. В соответствии с этим замените числа этого квадрата подходящими буквами.

[1] По другому поводу эта схема встречалась в решении задачи 104.

306. «Шкатулка» арифметических курьезов

Прекурьезнейшие соотношения иной раз обнаруживаются среди целых чисел!

Возьмем, например, 12 обыкновенных целых чисел:

$$1, 2, 3, 6, 7, 11, 13, 17, 18, 21, 22, 23.$$

С виду они ничем не примечательны. Но вот я разбиваю их на две группы:

$$1, 6, 7, 17, 18, 23 \text{ и } 2, 3, 11, 13, 21, 22.$$

Сравните теперь суммы чисел каждой группы:

$$1 + 6 + 7 + 17 + 18 + 23 = 72,$$
$$2 + 3 + 11 + 13 + 21 + 22 = 72.$$

Суммы оказались равными. А суммы квадратов тех же чисел?

$$1^2 + 6^2 + 7^2 + 17^2 + 18^2 + 23^2 = 1228,$$
$$2^2 + 3^2 + 11^2 + 13^2 + 21^2 + 22^2 = 1228.$$

Суммы квадратов тоже одинаковы. А суммы кубов? Можете сами убедиться в том, что и суммы кубов, и суммы четвертых степеней, и суммы пятых степеней этих чисел будут одинаковыми:

$$1^3 + 6^3 + 7^3 + 17^3 + 18^3 + 23^3 = 2^3 + 3^3 + 11^3 + 13^3 + 21^3 + 22^3;$$
$$1^4 + 6^4 + 7^4 + 17^4 + 18^4 + 23^4 = 2^4 + 3^4 + 11^4 + 13^4 + 21^4 + 22^4;$$
$$1^5 + 6^5 + 7^5 + 17^5 + 18^5 + 23^5 = 2^5 + 3^5 + 11^5 + 13^5 + 21^5 + 22^5.$$

Еще поразительнее: увеличивайте или уменьшайте все числа первой и второй групп на какое угодно одно и то же целое число — получающиеся новые группы будут обладать теми же свойствами!

Уменьшим, например, все данные числа на 12; получим: $-11, -6, -5, 5, 6, 11$ и $-10, -9, -1, 1, 9, 10$.

Очевидно, что сумма чисел первой группы равна сумме чисел второй группы (обе суммы — нули). Равны и суммы кубов и суммы пятых степеней этих чисел (тоже — нули). Нетрудно убедиться и в равенстве сумм квадратов и сумм четвертых степеней данных чисел:

$$(-11)^2 + (-6)^2 + (-5)^2 + 5^2 + 6^2 + 11^2 =$$
$$= (-10)^2 + (-9)^2 + (-1)^2 + 1^2 + 9^2 + 10^2;$$

$$(-11)^4 + (-6)^4 + (-5)^4 + 5^4 + 6^4 + 11^4 =$$
$$= (-10)^4 + (-9)^4 + (-1)^4 + 1^4 + 9^4 + 10^4.$$

Ну а теперь небольшая догадка, и в ваших руках будет формула, которая даст вам столько групп чисел, обладающих вышеуказанным свойством, сколько вы захотите:

$$(m - 11)^n + (m - 6)^n + (m - 5)^n + (m + 5)^n + (m + 6)^n +$$
$$+ (m + 11)^n = (m - 10)^n + (m - 9)^n + (m - 1)^n +$$
$$+ (m + 1)^n + (m + 9)^n + (m + 10)^n,$$

где m — любое число, а n = 1, 2, 3, 4 или 5.

Интересны также и те числа, которые вычитаются из числа m или прибавляются к нему. Каждое из этих чисел, взятое со знаком плюс либо со знаком минус, входит в состав первой и третьей строк так называемого «нулевого» неполного волшебного квадрата (рис. 198). «Нулевым» он назван потому, что сумма чисел в каждой строке и в каждом столбце равна нулю. Элементы (числа) «нулевого» волшебного квадрата образуют еще несколько курьезных соотношений:

6	-11	5
-16	12	4
10	-1	-9

Рис. 198. «Нулевой» неполный квадрат

$$1)\ 6^2 + (-11)^2 + 5^2 = 10^2 + (-1)^2 + (-9)^2,$$
$$6^4 + (-11)^4 + 5^4 = 10^4 + (-1)^4 + (-9)^4;$$

2) равны между собой суммы произведений чисел по строкам, по столбцам, а также по всем диагоналям, которые могут образоваться при любом перемещении строк и столбцов квадрата:

$$[6 \times (-16) \times 10] + [(-11) \times 12 \times (-1)] + [5 \times 4 \times (-9)] = [6 \times$$
$$\times (-11) \times 5] + [(-16) \times 12 \times 4] + [10 \times (-1) \times (-9)] =$$
$$= [6 \times 12 (-9)] + [(-11) \times 4 \times 10] + [5 \times (-16) \times (-1)] =$$
$$= (5 \times 12 \times 10) + [(-11) \times (-16) \times (-9)] +$$
$$+ [6 \times 4 \times (-1)] = 1008;$$

3) если элементы (числа) любого столбца или строки обозначить буквами a, b и c, то, кроме основного тождества $a + b + c = 0$, будут справедливы следующие:

$$a^2 - bc = b^2 - ca = c^2 - ab,\ a^3 + b^3 + c^3 = 3abc.$$

Убедитесь в этом.

Как видите, этот «нулевой» волшебный квадрат — целая «шкатулка» разных курьезных арифметических соотношений.

B. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВОЛШЕБНЫХ КВАДРАТОВ

307. «По дополнению»

Пусть a, a^1, b, b^1, c, c^1, d, d^1, e, e^1, f, f^1, g, g^1, h и h^1 — элементы традиционного волшебного квадрата четвертого порядка (рис. 199), причем

$$a + a^1 = b + b^1 = c + c^1 = \ldots = 17.$$

Такое соотношение между числами квадрата вполне возможно, так как все шестнадцать целых чисел, составляющих традиционный волшебный квадрат, делятся на восемь пар так, что числа каждой пары дополняют друг друга до 17. Например, 1 и 16, 2 и 15, 3 и 14 и т. д. Поставим такую задачу.

a	h	e	c
g	b	d	f
e'	c'	a'	h'
d'	f'	g'	b'

Рис. 199. Числа волшебного квадрата заменены буквами

Заменяя буквы числами, определите, сколько можно получить существенно различных волшебных квадратов с постоянной суммой, равной 34, вдоль каждой горизонтали, вертикали и диагонали, по четырем вершинам данного квадрата, в квадрате из *четырех* соседних клеток и по четырем вершинам любого квадрата из *девяти* соседних клеток.

Существенно различными квадратами мы будем называть такие, которые *нельзя* получить один из другого путем перестановки строк и столбцов и замены строк столбцами.

По условию, $a + b + g + h = 34$. Не теряя общности, можно считать $a = 1$, тогда $a^1 = 16$. В таком случае b, g и h каждое меньше 16. Отсюда в свою очередь следует, что каждое из них больше 3. Будь, например, $b \leq 3$, тогда неизбежно g или h было бы больше или равно 16, что исключено.

По условию, имеем еще: $a + b^1 + c + d^1 = 34$. Рассуждая аналогично предыдущему, заключаем, что каждое из чисел b^1, c и d^1 больше 3. Если теперь $b = 14$ или 15, то $b^1 = 3$ или 2, что исключается. Следовательно, $3 < b < 14$.

Не теряя общности, можно считать $b \leq 8$, так как если $b > 8$, то $b^1 \leq 8$, которое может равноправно заменить собой b. Значит, достаточно рассмотреть следующие возможные значения: $b = 4, 5, 6, 7$ и 8.

Общность не нарушится и от предположения, что $h > g$. Теперь нетрудно перечислить все возможные значения группы чисел (a, b, g и h):

(1, 4, 14, 15),	(1, 6, 13, 14),	(1, 8, 10, 15),
(1, 5, 13, 15),	(1, 7, 11, 15),	(1, 8, 11, 14),
(1, 6, 12, 15),	(1, 7, 12, 14),	(1, 8, 12, 13).

По каждому из этих комплектов мы можем подобрать соответствующие возможные значения для c и d^1, так как имеем по условию: $a + b^1 + c + d^1 = 34$.

Например, если a, b, g и h равны соответственно 1, 4, 14, 15 (первый комплект), то $b^1 = 13$, $c + d^1 = 34 - 1 - 13 = 20$ и для c и d^1 имеем только следующие возможные значения: 8 и 12 или 12 и 8, а также 9 и 11, или 11 и 9 (иные значения невозможны, так как числа не должны повторяться).

Таким же образом можно подобрать все возможные значения c и d^1, соответствующие остальным комплектам значений a, b, g и h. Проделайте этот подбор и составьте все возможные комплекты значений для a, b, g, h, b^1, c, d^1. Получится их не так уж много — всего 24.

Теперь для каждой из полученных 24 комбинаций нужно подобрать подходящие значения f и f^1. Это можно сделать, исходя из условия, что сумма чисел, расположенных в вершинах любого квадрата из девяти соседних клеток, должна равняться константе квадрата, то есть 34:

$$b + f + b^1 + f^1 = 34.$$

Подбирая подходящие значения f и f^1, следует иметь в виду, что каждое найденное значение f или f^1 позволяет сразу же *однозначно* определить значение последней пары неизвестных: e и e^1. Проделав терпеливо соответствующее испытание каждого из 24 случаев, вы обнаружите, что в *10 случаях* не обеспечиваются возможные значения для f и f^1, в *4 случаях* не обеспечивается к трем найденным в строке или столбце такое четвертое число, чтобы сумма четырех чисел равнялась 34; не годится, например, комбинация чисел (1, 10, 13) или (1, 9, 15), так как волшебный квадрат не должен иметь повторяющихся чисел, а как раз в первом из этих случаев четвертым числом могло бы быть только 10 (= 34 – 1 – 10 – 13), а во втором — 9 (= 34 – 1 – 9 – 15), в *7 случаях* не обеспечиваются существенно различные квадраты, то есть получающиеся квадраты могут быть преобразованы один в другой путем перестановки строк и столбцов и замены строк столбцами, и только в *3 случаях* получающиеся комбинации чисел удовлетворяют всем поставленным условиям.

Итак, возможны только три существенно различных волшебных квадрата четвертого порядка «по дополнению», обладающих вышеуказанными свойствами. Они представлены на рис. 200. Последний из этих квадратов только порядком расположения столбцов и строк отличается от волшебного квадрата, рассмотренного нами вначале (см. рисунок в начале главы). Тот квадрат, как вы помните, обладал рядом дополнительных свойств. Почти все эти дополнительные свойства присущи и первым двум квадратам.

1	15	10	8
14	4	5	11
7	9	16	2
12	6	3	13

1	15	6	12
14	4	9	7
11	5	16	2
8	10	3	13

1	15	4	14
12	6	9	7
13	3	16	2
8	10	5	11

Рис. 200. Три существенно различных волшебных квадрата

Читателю, знакомому с определителями, будет интересно узнать еще об одном свойстве приведенных здесь трех волшебных квадратов: если каждый из них рассматривать как определитель четвертого порядка, то такой определитель будет равен нулю. Таким же свойством обладает иногда и волшебный квадрат восьмого порядка (см. рис. 183).

308. «Правильные» волшебные квадраты четвертого порядка

Каждый традиционный волшебный квадрат четвертого порядка может быть разложен на сумму таких четырех квадратов, что в первом квадрате будут только единицы, во втором — только двойки, в третьем — четверки и в четвертом — восьмерки. В самом деле, элементами традиционного волшебного квадрата четвертого порядка будут все целые числа от 1 до 16, а если каждое из них уменьшить на 1, то получим волшебный квадрат, элементами которого будут все целые числа от 0 до 15.

Используя только четыре числа 1, 2, 4 и 8, причем каждое не больше чем по одному разу, можно при помощи сложения составить любое целое число от 1 до 15:

$1 = 1$,	$6 = 2 + 4$,	$11 = 1 + 2 + 8$,
$2 = 2$,	$7 = 1 + 2 + 4$,	$12 = 4 + 8$,
$3 = 1 + 2$,	$8 = 8$,	$13 = 1 + 4 + 8$,
$4 = 4$,	$9 = 1 + 8$,	$14 = 2 + 4 + 8$,
$5 = 1 + 4$,	$10 = 2 + 8$,	$15 = 1 + 2 + 4 + 8$.

Пользуясь такой возможностью, разложим все числа волшебного квадрата на составные части, оставим единицы на своих местах, а двойки, четверки и восьмерки отделим и разместим их по отдельности в соответствующих клетках заранее приготовленных квадратов. Это и будет разложением данного волшебного квадрата четвертого порядка на сумму четырех квадратов.

9	14	2	5
15	4	8	3
0	11	7	12
6	1	13	10

Рис. 201. «Правильный» волшебный квадрат...

Так, например, квадрат, представленный на рис. 201, разлагается на сумму четырех квадратов, изображенных на рис. 202. Волшебный квадрат, представленный на рис. 203, разлагается на сумму четырех квадратов, представленных на рис. 204.

Волшебный квадрат четвертого порядка будем называть *правильным*, если каждый из составляющих его четырех квадратов также будет волшебным квадратом.

1			1
1			1
	1	1	
	1	1	

	2	2	
2			2
	2	2	
2			2

	4		4
4	4		
		4	4
4		4	

8	8		
8		8	
	8		8
		8	8

Рис. 202. ...и составляющие его квадраты

Так, волшебный квадрат, приведенный в первом примере, — правильный, а во втором примере — неправильный (суммы чисел вдоль диагоналей не равны суммам чисел вдоль строк и столбцов).

Простейших волшебных квадратов, в клетках которых стоят только два различных числа, может быть восемь (рис. 205).

Складывая эти восемь простейших квадратов по четыре, мы можем получить всевозможные правильные волшебные квадраты четвертого порядка. Среди них будет только *одиннадцать* таких, все элементы которых различны между собой.

0	4	15	11
9	13	2	6
14	10	5	1
7	3	8	12

Рис. 203. «Неправильный» волшебный квадрат...

		1	1
1	1		
		1	1
1	1		

		2	2
		2	2
2	2		
2	2		

	4	4	
	4		4
4		4	
4			4

		8	8
8	8		
8	8		
		8	8

Рис. 204. ...и составляющие его квадраты

a	a	a'	a'
a'	a'	a	a
a	a	a'	a'
a'	a'	a	a

в	в'	в	в'
в	в'	в	в'
в'	в	в'	в
в'	в	в'	в

c	c'	c	c'
c'	c	c'	c
c'	c	c'	c
c	c'	c	c'

d	d'	d'	d
d'	d	d	d'
d	d'	d'	d
d'	d	d	d'

e	e	e'	e'
e'	e'	e	e
e'	e'	e	e
e	e	e'	e'

f	f'	f'	f
f	f'	f'	f
f'	f	f	f'
f'	f	f	f'

g	g	g'	g'
g	g'	g	g'
g'	g	g'	g
g'	g'	g	g

h	h'	h	h'
h'	h'	h	h
h	h	h'	h'
h'	h	h'	h

Рис. 205. Волшебные квадраты, в клетках которых только два различных числа

Если обозначим условно восемь данных простейших квадратов соответственно буквами A, B, C, D, E, F, G и H, то одиннадцать правильных волшебных квадратов получатся в следующих комбинациях:

$$
\begin{array}{ll}
A + B + C + D, & B + C + D + F, \\
A + B + C + E, & B + C + E + F, \\
A + B + D + F, & C + D + E + F, \\
A + B + E + F, & C + E + G + F, \\
A + C + D + E, & D + F + G + H. \\
A + D + E + F, &
\end{array}
$$

В каждом из найденных одиннадцати квадратов вместо пар букв a и a^1, b и b^1, c и c^1 и т. д. нужно подставить в каком-нибудь порядке четыре пары цифр: 0 и 1, 0 и 2, 0 и 4, 0 и 8.

Для примера возьмем квадрат $C + E + G + H$ и положим в нем:

$$c = 0, e = 4, g = 8, h = 0,$$
$$c^1 = 2, e^1 = 0, g^1 = 0, h^1 = 1.$$

Получится волшебный квадрат, который представлен на рис. 206.

Так как четыре пары цифр можно перемещать двадцатью четырьмя способами, а цифры каждой пары — двумя способами, то число всех правильных волшебных квадратов равно $11 \times 16 \times 24 = 4224$. Если же восемь квадратов, полученных поворачиванием и переворачиванием одного квадрата, будем считать за одно решение, то число различных возможных правильных волшебных квадратов будет равно $4224 : 8 = 528$.

12	15	0	3
11	1	14	4
2	8	7	13
5	6	9	10

Рис. 206. Еще один правильный волшебный квадрат

309. Подбор чисел для волшебного квадрата любого порядка

Дан квадрат, состоящий из n^2 клеток (n — любое целое число). Требуется заполнить все клетки целыми числами так, чтобы их сумма в каждой строке, в каждом столбце и в каждой диагонали равнялась одному и тому же произвольно нами выбранному числу S (константа квадрата). Другими словами, предлагается составить волшебный квадрат, но не обязательно традиционный, то есть не требующий использования непременно порядковых чисел.

У традиционного волшебного квадрата константа S не может быть произвольной. Она предопределена подбором чисел. Если составляется квадрат n-го порядка и используются порядковые числа от 1 до n^2, то сумма всех этих чисел равна $1 + 2 + 3 + \ldots + n^2 = \frac{(1 + n^2)\, n^2}{2}$ (сумма членов арифметической прогрессии). Следовательно, сумма чисел одного ряда, столбца или диагонали определяется формулой

$$S = \frac{(1 + n^2)\, n}{2}.$$

Мы же, заполняя клетки квадрата, позволим себе употребить любые целые числа, даже отрицательные и не обязательно каждое только по одному разу (разумеется, все n^2 чисел не должны быть одинаковыми).

Может показаться, что при такой свободе в отношении выбора чисел задача становится весьма несложной. Попробуйте, и вы убедитесь, что это далеко не так. Настоятельно рекомендую все же непременно попробовать составить хотя бы квадрат пятого порядка из произвольных чисел (с какой угодно произвольной константой) и только после этого продолжать чтение этой главы.

Прежде чем перейти к общему случаю, остановимся отдельно на волшебных квадратах третьего и четвертого порядков. Привлечем на помощь алгебру.

Квадрат третьего порядка. Все искомые числа обозначим буквой a с двумя числами (индексами) около нее справа, внизу (рис. 207). Первое число индекса будет указывать номер строки, в которой находится a, а второе число индекса — номер столбца, в котором находится это a.

a_{11}	a_{12}	a_{13}
a_{21}	a_{22}	a_{23}
a_{31}	a_{32}	a_{33}

Рис. 207. Числа обозначены буквой *a* с индексами

Так как, по условию, квадрат волшебный, то имеем восемь уравнений: шесть для сумм чисел в каждой из трех строк и в каждом из трех столбцов и два для сумм чисел в каждой из двух диагоналей. Нетрудно, однако, обнаружить, что независимых уравнений будет только шесть (два остальных уравнения — следствия первых шести). В самом деле, учитывая, что $a_{22} = \frac{S}{3}$, где S — константа квадрата (см. задачу 304), получаем следующую систему уравнений:

$$a_{11} + a_{12} + a_{13} = S, \qquad (1)$$
$$a_{31} + a_{32} + a_{33} = S, \qquad (2)$$
$$a_{11} + a_{21} + a_{31} = S, \qquad (3)$$
$$a_{13} + a_{23} + a_{33} = S, \qquad (4)$$
$$a_{21} + a_{23} = \frac{2}{3} S, \qquad (5)$$
$$a_{12} + a_{32} = \frac{2}{3} S, \qquad (6)$$
$$a_{11} + a_{33} = \frac{2}{3} S, \qquad (7)$$
$$a_{13} + a_{31} = \frac{2}{3} S. \qquad (8)$$

Складывая уравнения (6), (7), (8) и вычитая (2), получаем уравнение (1). Это показывает, что уравнение (1) не будет независимым от остальных или, как говорят, представляет собой следствие остальных уравнений. Исключим его из нашей системы. Складывая уравнения (5), (7), (8) и вычитая (3), получаем уравнение (4). Отсюда следует, что уравнение (4) есть следствие оставшихся уравнений. Исключим и его из нашей системы. Остается шесть уравнений с восемью неизвестными.

Теперь нужно показать, что эти шесть уравнений: (2), (3), (5), (6), (7) и (8) не зависят друг от друга. С этой целью следует выделить какие-либо шесть неизвестных из восьми и выразить каждое из них через остальные два неизвестных числа и известное S. Если это удастся, то система независима. Убедитесь самостоятельно в том, что система уравнений (2), (3), (5), (6), (7), (8) разрешима, например, относительно неизвестных a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{23} и a_{32}.

Итак, из восьми уравнений с девятью неизвестными независимых уравнений только шесть. Это дает нам право какие-либо три числа из девяти искомых выбрать произвольно.

$k+x$	$k-x-y$	$k+y$
$k-x+y$	k	$k+x-y$
$k-y$	$k+x+y$	$k-x$

Рис. 208. Формула волшебного квадрата третьего порядка

Принимая во внимание, что $a_{22} = \frac{S}{3}$, положим

$$a_{22} = k.$$

Числа a_{11} и a_{13} положим равными $k + x$ и $k + y$, где k, x и y произвольны:

$$a_{11} = k + x, a_{22} = k, a_{13} = k + y,$$

тогда получим решение, представленное на рис. 208.

Заменяя в этом решении x на $-x$, или y на $-y$, или x на y, а y на x, будем получать такое же распределение чисел, может быть, только с заменой строк столбцами или другим порядком их чередования. Можем поэтому положить

$$x \geq y,$$

где x и y — положительны. Наименьшее число в полученном квадрате $k - x - y$, наибольшее $k + x + y$. Зная это, легко получить и знакомый нам уже традиционный квадрат, наименьшее число которого 1, а наибольшее 9. Имеем:

$$k - x - y = 1,$$
$$k + x + y = 9,$$

кроме того,

$$k = \frac{S}{3} = \frac{15}{3} = 5.$$

Отсюда

$$x = 3, y = 1,$$

и мы получаем единственно возможное расположение чисел (с точностью до расположения строк и столбцов) для традиционного волшебного квадрата третьего порядка (рис. 209).

8	1	6
3	5	7
4	9	2

Рис. 209. Традиционный волшебный квадрат третьего порядка

a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}
a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}
a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}
a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}

Рис. 210. Числа заменены буквой а с индексами

Квадрат четвертого порядка. Для отыскания шестнадцати чисел, из которых можно было бы составить волшебный квадрат четвертого порядка (рис. 210), мы имеем восемь независимых уравнений.

Если умело выбрать восемь неизвестных и придать им произвольные значения, то остальные восемь неизвестных будут найдены решением системы уравнений.

Полезно заметить, что в любом волшебном квадрате четвертого порядка сумма четырех центральных элементов равна сумме чисел каждого ряда, то есть константе квадрата S:

$$a_{22} + a_{23} + a_{32} + a_{33} = S.$$

В справедливости этого характеристического свойства волшебного квадрата четвертого порядка вы можете убедиться самостоятельно.

Введем теперь восемь произвольных чисел: A, B, C, D, a, b, c, d следующим образом:

$$a_{32} = A,\ a_{22} = B,$$
$$a_{23} = C,\ a_{33} = D,$$
$$a_{11} = A - a,$$
$$a_{12} = C + a + c,$$
$$a_{13} = B + b - c,$$
$$a_{21} = D + a - d.$$

Остальные восемь чисел определить нетрудно, и мы получим формулу (предложена Е. Бергольцем в 1910 году), представленную на рис. 211.

$A-a$	$C+a+c$	$B+b-c$	$D-b$
$D+a-d$	B	C	$A-a+a$
$C-b+d$	A	D	$B+b-d$
$B+b$	$D-a-c$	$A-b+c$	$C+a$

Рис. 211. Формула волшебного квадрата четвертого порядка

Значительно раньше, в 1884 году, в «Журнале элементарной математики» профессором В. П. Ермаковым была опубликована формула, которую можно предложить в виде суммы двух волшебных квадратов (рис. 212).

Произвольно подбирая восемь чисел:

$$A, B, C, D, a, b, c, d$$

и складывая оба квадрата «поклеточно» (то есть складывая числа в совпавших клетках при наложении одного квадрата на другой), мы получим искомый волшебный квадрат.

По поводу того, как подобрать эти восемь чисел, чтобы в клетках полученного квадрата стояли все целые числа от 1 до 16 (то есть, чтобы квадрат оказался традиционным), В. П. Ермаков пишет: «Мы не знаем простого решения этого вопроса и предоставляем читателям найти таковое».

$$
\begin{array}{|c|c|c|c|}
\hline
A & C & D & B \\ \hline
D & B & A & C \\ \hline
B & D & C & A \\ \hline
C & A & B & D \\ \hline
\end{array}
\;+\;
\begin{array}{|c|c|c|c|}
\hline
 & a+b & -a-b & \\ \hline
c-d & -a-c & a-c & c+d \\ \hline
-c+d & -a+c & a+c & -c-d \\ \hline
 & a-b & -a+b & \\ \hline
\end{array}
$$

Рис. 212. Формула В. П. Ермакова

Квадрат порядка n ($n > 4$). Числа, составляющие квадрат n-го порядка при $n > 4$, можно представить следующим образом:

$$
\begin{array}{c}
a_{11},\ a_{12},\ \ldots,\ a_{1,\,p-1},\ a_{1p},\ a_{1,\,p+1},\ \ldots,\ a_{1,\,n-1},\ a_{1n}, \\
a_{21},\ a_{22},\ \ldots,\ a_{2,\,p-1},\ a_{2p},\ a_{2,\,p+1},\ \ldots,\ a_{2,\,n-1},\ a_{2n}, \\
a_{31},\ a_{32},\ \ldots,\ a_{3,\,p-1},\ a_{3p},\ a_{3,\,p+1},\ \ldots,\ a_{3,\,n-1},\ a_{3n}, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
a_{n-1,1},\ a_{n-1,2},\ \ldots,\ a_{n-1,\,p-1},\ a_{n-1,\,p},\ a_{n-1,\,p+1},\ \ldots,\ a_{n-1,\,n-1},\ a_{n-1,\,n}, \\
a_{n1},\ a_{n2},\ \ldots,\ a_{n,\,p-1},\ a_{n,\,p},\ a_{n,\,p+1},\ \ldots,\ a_{n,\,n-1},\ a_{n,\,n}.
\end{array}
$$

Здесь n^2 неизвестных чисел, которые могут быть любыми алгебраическими количествами, лишь бы их сумма вдоль каждой строки, каждого столбца и каждой из двух диагоналей была бы одинаковой, равной произвольному, заранее выбранному числу S.

По условию, относительно n^2 неизвестных имеем $2n + 2$ линейных соотношений; из них независимых соотношений самое большее $2n$. Значит, $n^2 - 2n$ количеств a можно выбрать произвольно. Вопрос в том, какие из этих количеств a следует считать произвольными постоянными, чтобы можно было во всех случаях гарантировать отыскание остальных $2n$ количеств a, отвечающих всем требованиям волшебного квадрата.

Сохраним за теми количествами, которые мы будем полагать произвольными, обозначение их буквой a с соответствующими индексами, остальные искомые количества обозначим буквами $b_1, b_2, \ldots, b_{2n-1}, . b_{2n}$ и разместим их по клеткам квадрата, руководствуясь следующей схемой:

$$
\begin{array}{c}
a_{11}, a_{12}, a_{13}, \ldots, a_{1,p-1}, a_{1p}, a_{1,p+1}, \ldots, a_{1,n-2}, a_{1,n-1}, a_{1n}, \\
a_{21}, a_{22}, a_{23}, \ldots, a_{2,p-1}, a_{2p}, a_{2,p+1}, \ldots, a_{2,n-2}, a_{2,n-1}, b_1, \\
a_{31}, a_{32}, a_{33}, \ldots, a_{3,p-1}, a_{3p}, a_{3,p+1}, \ldots, a_{3,n-2}, a_{3,n-1}, b_2, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_{n-2,1}, a_{n-2,2}, a_{n-2,3}, \ldots, a_{n-2,p-1}, a_{n-2,p}, a_{n-2,p+1}, \ldots, a_{n-2,n-2}, a_{n-2,n-1}, b_{n-3}, \\
b_{2n-2}, a_{n-1,2}, a_{n-1,3}, \ldots, a_{n-1,p-1}, b_{2,n-1}, a_{n-1,p+1}, \ldots, a_{n-2,n-2}, a_{n-1,n-1}, b_{n-1}, \\
b_{2n-3}, b_{2n-4}, b_{2n-5}, \ldots, b_{2n-v-1}, b_{2n}, b_{2n-v-2}, \ldots, b_{n+1}, b_n, b_{n-2},
\end{array}
$$

Пусть R_i — сумма чисел а в i-м ряду, причем $R_1 = S$, C_i — сумма чисел a в i-м столбце,

$$
\left.\begin{array}{l}
D_1 = a_{11} + a_{22} + a_{33} + \ldots + a_{n-1,n-1}, \\
D_2 = a_{1,n} + a_{2,n-1} + a_{3,n-2} + \ldots + a_{n-1,2}
\end{array}\right\} \text{суммы чисел } a \text{ вдоль диагоналей}
$$

Сумму всех чисел a, имеющихся в квадрате, обозначим через S. Заменяя произвольными числами количества, обозначенные буквами a, мы сможем определить количества b в той последовательности, как они пронумерованы при помощи следующих равенств:

$$
\left.\begin{array}{l}
b_1 = R_1 - R_2, \\
b_2 = R_1 - R_3, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots \\
b_{n-3} = R_1 - R_{n-2}, \\
b_{n-2} = R_1 - D_1, \\
b_{n-1} = R_1 - C_n - (b_1 + b_2 + \ldots + b_{n-3} + b_{n-2}), \\
b_n = R_1 - C_{n+1}, \\
b_{n+1} = R_1 - C_{n-2}, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots \\
b_{2n-p-2} = R_1 - C_{p+1}, \\
b_{2n-p-1} = R_1 - C_{p-1}, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots \\
b_{2n-4} = R_1 - C_2, \\
b_{2n-3} = R_1 - D_2, \\
b_{2n-2} = R_1 - C_1 - b_{2n-3}, \\
b_{2n-1} = R_1 - R_{n-1} - b_{n-1} - b_{2n-2}, \\
b_{2n} = R_1 - C_p - b_{2n-1.}
\end{array}\right\} (*)
$$

Заметим, что b_{2n-1} занимает клетку в $(n-1)$-й строке, но не включается в состав той или иной диагонали. Такое расположение было бы невозможным для $n \leq 4$. Следовательно, эти случаи не охватываются предложенной схемой, но они уже были рассмотрены отдельно.

Все количества b, расположенные в последней строке, определяются независимо друг от друга, следовательно, нужно проверить, будет ли их сумма

$$b_{n-3} + b_n + b_{n+1} + \ldots + b_{2n-3} + b_{2n} \qquad (**)$$

составлять константу нашего квадрата S, или, что то же самое, R_1. Для этого выберем соответствующие соотношения из равенств (*), и некоторые из них предварительно преобразуем:

$$b_{n-1} = R_1 - C_n - (b_1 + b_2 + \ldots + b_{n-3} + b_{n-2}) = R_1 - C_n - (R_1 - R_2 + R_1 - \\ - R_3 + \ldots + R_1 - R_{n-2} + R_1 - D_1) = R_1 - C_n - R_1 + R_2 - R_1 + R_3 - \ldots \\ - R_1 + R_{n-1} - R_1 + D_1 = D_1 + C_n + (R_1 + R_2 + \ldots + R_{n-2}) - \\ \underbrace{- (R_1 + R_1 + \ldots + R_1).}_{(n-2\text{ раза})}$$

Припоминая определение чисел R_1; и S и замечая, что числа a расположены во всех строках, кроме последней, имеем:

$$R_1 + R_2 + \ldots + R_{n-2} = S - R_{n-1},$$

следовательно,

$$b_{n-1} = D_1 - C_n + S - R_{n-1} - (n-2)\,R_1,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$b_{2n-2} = R_1 - C_1 - b_{2n-3} = R_1 - C_1 - (R_1 - D_2) = D_2 - C_1,$$
$$b_{2n-1} = R_1 - R_{n-1} - b_{n-1} - b_{2n-2} = R_1 - \mathrm{R}_{n-1} - [D_1 - C_n + S - R_{n-1} - \\ - (n-2)\,R_1] - (D_2 - C_1) = (n-1)\,R_1 + C_1 + C_n - D_1 - D_2 - S;$$
$$b_{2n} = R_1 - C_p - b_{2n-1} = R_1 - C_p - (n-1)\,R_1 - C_1 - C_n + D_1 + D_2 + \\ + S = D_1 + D_2 - C_1 - C_p - C_n - (n-2)\,R_1 + S.$$

Подставляя найденные соотношения в (**), получим:

$$b_{2n-2} + \underbrace{(b_n + b_{n+1} + \ldots + b_{2n-4} + b_{2n-3})}_{(n-2)\text{ слагаемых}} + b_{2n} =$$

$$= R_1 - D_1 + (R_1 - C_{n-1} + R_1 - C_{n-2} + \ldots + R_1 - C_2 +$$
$$+ R_1 - D_2) + D_1 + D_2 - C_1 - C_p - C_n - (n-2) R_1 + S = R_1 - D_1 +$$
$$+ [R_1 (n-2) - (C_{n-1} + C_{n-2} + \ldots + C_2) - D_2] + D_1 + D_2 - C_1 - C_p - C_n -$$
$$- (n-2) R_1 + S = R_1 - (C_n + C_{n-1} + \ldots + C_p + \ldots + C_2 + C_1) + S.$$

Но $C_1 + C_2 + \ldots + C_{n-1} + C_n = S$, следовательно,

$$b_{2n-2} + b_n + b_{n+1} + \ldots + b_{2n-3} + b_{2n} = R_1.$$

Итак, изложенные здесь общие правила действительно обеспечивают возможность составления любого (вообще говоря, нетрадиционного) волшебного квадрата.

В случае $n = 5$ конструкция волшебного квадрата будет такой, как показано на рис. 213.

•	•	•	•	•
•	•	•	•	b_1
•	•	•	•	b_2
b_8	•	b_9	•	b_4
b_7	b_6	b_{10}	b_5	b_3

Рис. 213. Конструкция волшебного квадрата пятого порядка

Расставьте вместо точек произвольные числа, определите b_1, b_2, …, b_{10} в порядке их нумерации. Полученный квадрат непременно будет волшебным.

Глава тринадцатая

КУРЬЕЗНОЕ И СЕРЬЕЗНОЕ В ЧИСЛАХ

В предметах окружающего мира вы прежде всего замечаете их отдельные свойства, отличающие один предмет от другого.

Обилие частных, индивидуальных свойств заслоняет собой свойства общие, присущие решительно всем предметам, и обнаружить их поэтому всегда труднее.

Одно из важнейших общих свойств предметов таково: их все можно считать и измерять. Мы отражаем это общее свойство предметов в понятии числа.

Потребность считать и сравнивать (измерять) предметы возникла у людей не сразу, но очень давно — еще на ранней стадии развития человека.

Овладевали люди процессом счета, то есть понятием числа, очень медленно, веками.

Счету при помощи числа каждый человек теперь обучается незаметно еще в детстве, почти одновременно с тем, как начинает говорить, но этот привычный нам счет прошел длительный путь развития и принимал разные формы.

Было время, когда для счета предметов использовались лишь два числительных: один и два. В процессе дальнейшего расширения системы счисления привлекались части человеческого тела и в первую очередь пальцы, а если не хватало такого рода «цифр», то еще палочки, камешки и другие вещи.

Н. Н. Миклухо-Маклай в своей книге «Путешествия» рассказывает о забавном способе счета, который использовали туземцы Новой Гвинеи:

«Излюбленный способ счета состоит в том, что папуас загибает один за другим пальцы руки, причем издает определенный звук, например, "бе, бе, бе"... Досчитав до пяти, он говорит "ибон-бе" (рука). Затем он загибает пальцы другой руки, снова повторяет "бе, бе" пока не доходит до "ибон-али" (две руки). Затем он идет дальше, приговаривая "бе, бе", пока не доходит до "самба-бе" и "самба-али" (одна нога, две ноги). Если нужно считать дальше, папуас пользуется пальцами рук и ног кого-нибудь другого»[1].

Вслед за возникновением и развитием чисел появилась и замечательная наука об их свойствах и законах, ими управляющих: теория чисел.

Оперируя числами, то есть выполняя разнообразные математические действия, мы обнаруживаем не только их общие свойства, изучением которых занимается теория чисел, но и свойства особые, присущие иногда лишь небольшим группам чисел или отдельным числам. Эти особенные свойства могут и не иметь большого теоретического значения, но нередко весьма любопытны. Покопайтесь в огромном массиве чисел, которых больше, чем руды в земле, и вы найдете свойства интересные и удивительные, диковинные и забавные, неожиданные и курьезные.

Вы встретитесь с числами-уникумами, то есть с такими, похожих на которые нет среди остальных, а также и с целыми букетами чисел, образующих красивые сочетания.

310. Десять цифр (наблюдения)

I. Почти во всем мире пользуются теперь единой системой счисления: десятичной. В этой системе используется десять цифр: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 и 0, и этих цифр достаточно, чтобы записать любое число.

---

[1] Миклухо-Маклай Н. Путешествия. — М.: Изд. АН СССР, 1940. — Т. 1. — С. 280.

Для примера давайте образуем самое большое десятизначное число из всех десяти цифр, применяя общепринятую форму записи числа. Вот оно:

9 876 543 210.

Всякая перестановка цифр в этом числе приведет непременно к меньшему числу, не так ли?

Попутно любопытно было бы выяснить, сколько же различных целых десятизначных чисел можно записать при помощи десяти цифр, используя каждую цифру только по одному разу.

Миллион? Или меньше? Как это установить (не составляя, конечно, самих чисел)?

* * *

II. Установив, что десятизначных чисел с неповторяющимися цифрами свыше трех миллионов (см. ответ на предыдущий вопрос), возьмем из этой груды чисел всего лишь шесть:

1 037 246 958, 1 046 389 752, 1 286 375 904,
1 307 624 958, 1 370 258 694, 1 462 938 570.

Что же интересного в этих с виду ничем не примечательных числах?

Разделите каждое из предложенных шести чисел на 2, а получившиеся частные — на 9. Готово? Первая операция привела к девятизначным числам. Вторая — к восьмизначным.

Появились ли повторяющиеся цифры хотя бы в одном из чисел, получившихся в результате первой и второй операции?

Далее, вторая операция привела к числам, которые не содержат цифру 9. Но если вы исчезнувшую девятку припишете в конце одного из этих чисел, то оно станет полным квадратом, то есть таким числом, из которого «нацело» извлекается квадратный корень. Определите самостоятельно, какое из шести восьмизначных частных обладает этим свойством.

* * *

III. Для дальнейших наблюдений над курьезными свойствами чисел возьмем два числа:

$$a = 123\,456\,789 \text{ и } b = 987\,654\,321$$

— наименьшее и наибольшее из девятизначных чисел, состоящих из неповторяющихся цифр без нуля. Разность $b - a$ состоит из тех же цифр:

$$987\,654\,321 - 123\,456\,789 = 864\,197\,532.$$

Далее, если все однозначные числа, кроме нуля и единицы, поочередно умножить на числа a и b, то у произведений обнаружатся такие общие свойства, по которым все однозначные множители можно разбить на две группы:

2, 4, 5, 7, 8 и 3, 6, 9.

Какой же особенностью обладают числа каждой из этих групп относительно их произведений на a и на b?

По отношению к делению чисел a и b на те же однозначные числа также можно заметить некоторую особенность, отличающую числа первой группы от чисел второй.

Какую?

Число a обращается в число b при помощи двух действий: умножения a на некоторое однозначное число и увеличения получившегося произведения на другое однозначное число.

Найдите подходящий множитель и слагаемое.

* * *

IV. Если число 12 345 679, цифры которого расположены в порядке возрастающей последовательности, но без восьмерки, умножить сначала на любое однозначное число, а затем на 9, то все цифры окончательного результата будут совпадать с цифрой первого однозначного множителя. Например:

$$\begin{array}{r} \times\; 12\,345\,679 \\ 7 \\ \hline \times\; 86\,419\,753 \\ 9 \\ \hline 777\,777\,777 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \times\; 12\,345\,679 \\ 8 \\ \hline \times\; 98\,765\,432 \\ 9 \\ \hline 888\,888\,888 \end{array}$$

Проверьте на других множителях и найдите объяснение этому курьезному явлению.

311. Еще несколько занятных наблюдений

I. Телеграфная лента разорвалась как раз посредине числа 9801. На одном куске ленты оказалось 98, а на другом 01. Развлекаясь, я подсчитал сумму этих чисел, результат возвел в квадрат и… к своему удивлению, снова получил исходное число: $(98 + 01)^2 = 9801$.

Нетрудно проверить, что таким же свойством обладает и число 3025. Если его разбить на два числа 30 и 25, сложить их и сумму возвести в квадрат, то результат будет равен исходному числу.

Среди четырехзначных чисел, кроме указанных, есть еще только одно с таким же свойством. Как я это установил — расскажу в решениях. Какой способ решения вы выберете в этом случае?

* * *

II. Запишем один под другим несколько рядов чисел:

A

1	3	5	7	9	11	13	...
1	4	7	10	13	16	19	...
1	5	9	13	17	21	25	...
1	6	11	16	21	26	31	...
1	7	13	19	25	31	37	...
1	8	15	22	29	36	43	...
1	9	17	25	33	41	49	...

. . . . *C*

Первое число в каждом ряду 1, а все последующие числа больше предыдущих: в первом ряду на 2, во втором на 3, в третьем на 4 и т. д. (такие ряды называются арифметическими прогрессиями). Получилась некоторая таблица чисел. Если сгруппировать и складывать эти числа по пунктирным коридорчикам (в старину их называли гномонами), то сумма чисел в каждом пунктирном коридорчике будет равна кубу его номера n. Например, в коридоре № 2:

$$1 + 4 + 3 = 2^3.$$

В коридоре № 3:

$$1 + 5 + 9 + 7 + 5 = 3^3$$

и т. д.

Вообще сумма чисел в каждом n-м коридорчике равна n^3.

Далее, любое число, расположенное вдоль диагонали AC, будет квадратом номера занимаемой им строки. Сумма чисел в любом квадрате, диагональю которого будет какая-нибудь часть диагонали AC, тоже представляет собой полный квадрат, то есть равна квадрату некоторого числа.

Например, сумма чисел в квадрате, имеющем своей диагональю 25, 36 и 49, будет:

$$25 + 31 + 37 + 29 + 36 + 43 + 33 + 41 + 49 = 324 = 18^2.$$

Проверьте это свойство для других участков диагонали AC. Поищите аналогичные свойства у чисел следующей таблицы:

1	3	5	7	9	11	13	…
1	5	9	13	17	21	25	…
1	7	13	19	25	31	37	…
1	9	17	25	33	41	49	…
1	11	21	31	41	51	61	…

………………………………………

* * *

III. Много любопытных свойств можно обнаружить у числа 37.

1) Если его умножить на 3 или на число, кратное 3 (до 27 включительно), то результат будет выражен какой-либо одной цифрой, повторенной три раза:

$$37 \times 3 = 111,\ 37 \times 6 = 222,\ 37 \times 9=333,\ 37 \times 12 = \\ = 444,\ 37 \times 27 = 999.$$

2) Произведение числа 37 на сумму его цифр равно сумме кубов тех же цифр:

$$37 \times (3 + 7) = 3^3+7^3.$$

3) Если из суммы квадратов цифр числа 37 вычесть произведение тех же цифр, то получится опять 37:

$$(3^2 + 7^2) - 3 \times 7 = 37.$$

4) Наиболее интересное свойство: возьмем наудачу какое-нибудь трехзначное число, кратное 37, например $37 \times 7 = 259$. Все числа, получающиеся из числа 259 при круговой перестановке его цифр, то есть числа 925 и 592, тоже делятся на 37.

Круговой перестановкой цифр называется такая перестановка, когда каждый раз последнюю цифру числа переносят на первое место, не изменяя порядка расположения остальных цифр.

Возьмем наудачу еще одно трехзначное число, кратное 37. Пусть это будет $37 \times 5 = 185$. Круговая перестановка цифр дает числа 518 и 851. Они тоже делятся на 37.

Естественно, что напрашивается такое предположение: всякое число, получающееся при круговой перестановке цифр трехзначного числа, кратного 37, тоже кратно 37.

Проверьте, для всех ли трехзначных чисел, кратных 37, оправдывается высказанное предположение. Если действительно для всех, то предположение превращается в правильное математическое предложение.

Подобным же свойством отличаются и пятизначные числа, кратные 41. Так, числа 15 498, 81 549, 98 154, 49 815, 54 981, как легко проверить, все кратны 41, и каждое получается из предыдущего путем круговой перестановки цифр, составляющих число.

312. Два интересных опыта

Опыт 1. Напишем подряд четыре *произвольных* целых положительных числа, например 8, 17, 3, 107. Вычислим разности между первым и вторым числами (вычитая из большего числа меньшее), между вторым и третьим, между третьим и четвертым, наконец, между четвертым и первым, каждый раз вычитая из большего числа меньшее:

$$17 - 8 = 9,\ 17 - 3 = 14,\ 107 - 3 = 104,\ 107 - 8 = 99.$$

Назовем полученные разности первыми и расположим их по порядку в ряд: 9, 14, 104, 99.

Опять вычислим разности между первым и вторым, вторым и третьим, третьим и четвертым, четвертым и первым числами ряда первых разностей, каждый раз вычитая из большего числа меньшее:

$$14 - 9 = 5,\ 104 - 14 = 90,\ 104 - 99 = 5,\ 99 - 9 = 90.$$

Получим ряд вторых разностей: 5, 90, 5, 90.

Таким же образом составим ряд третьих разностей: 85, 85, 85, 85.

Ну а ряд четвертых разностей будет состоять из одних нулей: 0, 0, 0, 0.

Повторим опыт с другой группой чисел. Введем обозначения: A_0 — для начальной группы чисел, A_1 — для группы первых разностей, A_2 — для группы вторых разностей и т. д.

Пусть начальная группа A_0 содержит следующие четыре числа:

$$(93, 5, 21, 50).$$

Выполняем действия:

$$\begin{aligned}
A_0 &= (93,\ 5,\ 21,\ 50),\\
A_1 &= (88,\ 16,\ 29,\ 43),\\
A_2 &= (72,\ 13,\ 14,\ 45),\\
A_3 &= (59,\ 1,\ 31,\ 27),\\
A_4 &= (58,\ 30,\ 4,\ 32),\\
A_5 &= (28,\ 26,\ 28,\ 26),\\
A_6 &= (2,\ 2,\ 2,\ 2),\\
A_7 &= (0,\ 0,\ 0,\ 0).
\end{aligned}$$

Сделав всего лишь семь шагов, мы опять пришли к группе нулей.

Экспериментатор должен разнообразить условия опыта. Повторим опыт на какой-нибудь широко растянутой четверке чисел, например на числах: 1, 11, 130, 1700:

$$\begin{array}{rrrrr}
A_0 = & (1, & 11, & 130, & 1760), \\
A_1 = & (10, & 119, & 1630, & 1759), \\
A_2 = & (109, & 1511, & 129, & 1749), \\
A_3 = & (1402, & 1382, & 1620, & 1640), \\
A_4 = & (20, & 238, & 20, & 238), \\
A_5 = & (218, & 218, & 218, & 218), \\
A_6 = & (0, & 0, & 0, & 0).
\end{array}$$

Нули получились и, против ожидания, довольно скоро, в шесть шагов!

Проделайте сами еще десяток таких испытаний над различными группами из *четырех* целых положительных чисел. В любом случае вы дойдете до группы нулей, причем чаще всего (но не всегда) не более чем за восемь шагов.

Закономерно ли наблюдаемое явление или, может быть, найдется такая четверка чисел, которую не удастся довести до нулей, сколько бы разностей мы ни образовывали? Выяснить это нелегко. Потребуется некоторая изобретательность в построении необходимой цепочки рассуждений. Попытаться все-таки стоит. Поиски решения полезны даже и в том случае, когда не удается самостоятельно добраться до полного решения.

Замечание 1. Таким же свойством обращаться в нули обладают последовательные разности любой группы из восьми чисел или из шестнадцати и вообще из 2^n чисел (n — любое целое положительное число).

Замечание 2. Если количество чисел в исходной группе не есть степень 2 (то есть не 4, не 8, не 16 и т.д.), то процесс составления разностей может никогда и не привести к ряду нулей. Например, пусть $A_0 = (2, 5, 9)$, тогда

$$
\begin{aligned}
&A_0 = (2,\ 5,\ 9), && A_5 = (1,\ 1,\ 0),\\
&A_1 = (3,\ 4,\ 7), && A_6 = (0,\ 1,\ 1),\\
&A_2 = (1,\ 3,\ 4), && A_7 = (1,\ 0,\ 1),\\
&A_3 = (2,\ 1,\ 3), && A_8 = (1,\ 1,\ 0).\\
&A_4 = (1,\ 2,\ 1), &&
\end{aligned}
$$

A_8 совпало с A_5, следовательно, дальше будут без конца повторяться разности A_6, A_7, A_8.

Опыт 2. Напишите любое целое число и сложите *квадраты его цифр*. У получившегося результата снова сложите квадраты цифр. Повторяя эту операцию некоторое число раз, вы непременно придете или к числу 1, или к числу 89. Так, например, для числа 31 имеем:

$$
\begin{gathered}
3^2 + 1^2 = 10,\\
1^2 + 0^2 = 1.
\end{gathered}
$$

К такому же результату, очевидно, сразу приведут числа вида 10^n, где n — любое целое число, а также числа, составленные из цифр 1 и 3, или 6 и 8, взятых по одному разу, и любого количества нулей, то есть такие, например, как 13, 103, 3001, 68, 608, 8006 и т. п.

Возьмем теперь какое-нибудь другое число, например 48. В этом случае

$$
\begin{aligned}
4^2 + 8^2 &= 80, & 5^2 + 2^2 &= 29,\\
8^2 + 0^2 &= 64, & 2^2 + 9^2 &= 85,\\
6^2 + 4^2 &= 52, & 8^2 + 5^2 &= 89.
\end{aligned}
$$

Продолжая операцию, получим:

$$
\begin{aligned}
8^2 + 9^2 &= 145, & 4^2 &= 16,\\
1^2 + 4^2 + 5^2 &= 42, & 1^2 + 6^2 &= 37,\\
4^2 + 2^2 &= 20, & 3^2 + 7^2 &= 58,\\
2^2 + 0^2 &= 4, & 5^2 + 8^2 &= 89.
\end{aligned}
$$

На восьмом шагу повторилось число 89. Замечаем, что промежуточными числами были 145, 42, 20, 4, 16, 37 и 58. Отсюда следует, что если действительно сумма квадратов цифр любого числа в конце концов приводит к числу 1 или к числу 89, то в последнем случае окончательную сумму можно довести при желании не до 89, а до любого из 7 чисел: 145, 42, 20, 4, 16, 37 или 58.

Произведите сами еще несколько испытаний над разными числами.

Докажите это свойство.

Не менее любопытные закономерности можно обнаружить, подсчитывая *сумму кубов* или *сумму четвертых степеней* цифр любого числа и повторяя эту операцию над получающимися суммами. Впрочем, оставлю эти наблюдения и выводы из них как тему для ваших самостоятельных изысканий.

313. Числовая карусель

1) Вынимаю из бездонной числовой шкатулки число 142 857. Оно состоит из шести разных цифр. Расположим их по кругу в виде циферблата (рис. 214). Умножим теперь данное число последовательно на 1, 2, 3, 4, 5 и 6:

$$142\,857 \times \begin{cases} 1 = 142\,857, \\ 2 = 285\,714, \\ 3 = 428\,571, \\ 4 = 571\,428, \\ 5 = 714\,285, \\ 6 = 857\,142. \end{cases}$$

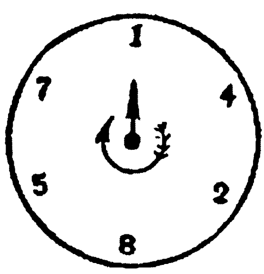


Рис. 214. Числовая карусель

Перемещаясь по циферблату вместе со стрелкой, мы прочтем любое из получившихся произведений.

Каждое число циферблата служит первой цифрой одного из результатов произведения. Настоящая числовая карусель, не правда ли?

2) Есть еще одно интересное свойство. Если любое из этих произведений рассечь на две грани по три цифры, а затем обе грани сложить, то во всех случаях результатом будет одно и то же число: 999. В самом деле, 142 + 857 = 999, 285 + 714 = = 999 и т. д.

3) Продолжим наши наблюдения над произведением числа 142 857 на целые числа, следующие за числом 7 (произведение на 7 рассмотрим позже):

$$142\,857 \times \left\{ \begin{array}{ll} 8 = 1\,142\,856 & (142\,856 + 1 = 142\,857), \\ 9 = 1\,285\,713 & (285\,713 + 1 = 285\,714), \\ 10 = 1\,428\,570 & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 11 = 1\,571\,427 & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 69 = 9\,857\,133 & (857\,133 + 9 = 857\,142). \end{array} \right.$$

Получаются семизначные числа, но тоже особенные: если зачеркнуть первую цифру и ее же прибавить к последней (см. равенства в круглых скобках) — снова получим одну из круговых перестановок числа 142 857.

Та же «карусель» из цифр числа 142 857 (за немногими исключениями) будет получаться и далее с восьмизначными результатами произведения, если только зачеркивать первые две цифры и прибавлять их к последним двум.

4) Произведение числа 142 857 на 7 резко отличается от остальных произведений. Оно состоит из одних девяток:

$$142\,857 \times 7 = 999\,999.$$

Вот это обстоятельство и проливает свет как на происхождение самого числа 142 857, так и на его «таинственные» свойства. Не будет ли оно периодом дроби $\frac{1}{7}$ при обращении ее в десятичную? Делим 1 на 7:

$$
\begin{array}{l|l}
\underline{1} & \;7 \\
\underline{10} & \overline{0{,}142857} \\
\;\underline{30} & \\
\;\;\underline{20} & \\
\;\;\;\underline{60} & \\
\;\;\;\;\underline{40} & \\
\;\;\;\;\;\underline{50} & \\
\;\;\;\;\;\;1 &
\end{array}
$$

Последний остаток повторил число 1, следовательно, при дальнейшем делении в частном будут повторяться те же цифры и в том же порядке. Это и есть периодическая дробь, то есть такая бесконечная дробь, в последовательности десятичных знаков которой обнаруживаются (начиная с некоторой цифры) повторения определенной группы цифр.

Предположение оправдалось: число 142 857 действительно является периодом дроби $\frac{1}{7}$ при обращении ее в десятичную. Чтобы уяснить, почему это число при умножении на 2, 3, 4, 5 и 6 дает лишь круговую перестановку своих цифр, вернемся к действию деления 1 на 7. Весь процесс обращения дроби $\frac{1}{7}$ в десятичную можно расчленить на следующие этапы:

$$
\frac{1}{7} = 0{,}1 + \frac{3}{7} \times 10^{-1} = 0{,}14 + \frac{2}{7} \times 10^{-2} = 0{,}142 + \frac{6}{7} \times 10^{-3} =
$$
$$
= 0{,}1428 + \frac{4}{7} \times 10^{-4} = 0{,}14285 + \frac{5}{7} \times 10^{-5} =
$$
$$
= 0{,}142857 + \frac{1}{7} \times 10^{-6} = \ldots \text{ (дальше повторение тех же цифр).}
$$

Отсюда ясно, что при обращении дроби в десятичную период начнется с цифры, расположенной после цифры 1 в числе 1 428 571 428 571 4…, то есть периодом будет 428 571; это же число, очевидно, должно быть и произведением числа 142 857 на 3, так как $\frac{3}{7} = \frac{1}{7} \times 3$.

Далее, при обращении дроби $\frac{3}{7}$ в десятичную период начнется с цифры, расположенной после цифр 1 и 4 в числе 1 428 571 428 571 4…, то есть периодом будет 285 714; это же число, очевидно, должно быть и произведением 142 857 на 2, так как $\frac{2}{7} = \frac{1}{7} \times 2$ и т.д.

Так же нетрудно уяснить, почему произведение числа 142 857 на 7 состоит из одних девяток. Дело в том, что десятичная дробь с бесконечно повторяющимися девятками после запятой считается равной 1, то есть 1 = 0,999999... и произведение дроби $\frac{1}{7}$ на 7 тоже равно 1.

5) Если дробь $\frac{a}{b}$ обращается в периодическую, то период ее может иметь не больше чем $b - 1$ цифр. В самом деле, при делении остаток всегда должен быть меньше делителя, но существует только конечное число целых чисел, меньших b, а именно 1, 2, 3, ..., $b - 1$.

Каждое из этих чисел может быть остатком при делении a на b, и каждому из них соответствует какая-либо цифра частного. Дальше возможно только повторение остатков, а значит, и повторение цифр частного. Отсюда и следует, что наибольшее возможное число цифр в периоде на 1 меньше знаменателя.

В дроби $\frac{3}{7}$, достигнута именно эта максимальная длина периода (6 цифр).

Период называется *полным*, если он состоит из наибольшего возможного при данном знаменателе числа цифр.

Но не всякая дробь имеет полный период. Например, период дроби $\frac{1}{39}$ содержит не 38 цифр, а только 6:

$$\frac{1}{39} = 0{,}025641025641\ldots$$

«Круговое» свойство числа 142 857, являющегося полным периодом дроби $\frac{1}{7}$, присуще также периоду любой другой периодической дроби, если только ее период *полный*.

Периоды дробей $\frac{1}{17}$ и $\frac{1}{29}$ полные:

$$\frac{1}{17} = 0{,}(0588235294117647),$$

$$\frac{1}{29} = 0{,}(0344827586206896551724137931).$$

В первом — 16 цифр, во втором — 28. Числа, образованные цифрами этих периодов, следовательно, обладают теми же свойствами, что и число 142 857.

314. Диск мгновенного умножения

К той же семье «круговых» чисел, что и число 142 857 (см. задачу 313), принадлежит число

$$M = 052\ 631\ 578\ 947\ 368\ 421.$$

При помощи диска, изображенного на рис. 215, оно может быть *мгновенно* умножено на любое целое число в пределах от 1 до 18.

По внешнему кольцу диска, изображенного на рис. 215, размещены все восемнадцать множителей. По внутреннему кольцу — все цифры множимого *M*; эти же цифры образуют и каждое из восемнадцати произведений.

Чтобы прочитать результат умножения числа *M* на любое из чисел внешнего кольца, нужно полностью обойти внутреннее кольцо, начиная с цифры, указанной ближайшей стрелкой, находящейся *справа* от множителя, если смотреть на цифры из центра диска. Двигаться при этом следует по ходу часовой стрелки.

Например, ближайшая стрелка справа от числа 14, расположенного на внешнем кольце, указывает на цифру 7. Это значит, что число 736 842 105 263 157 894 есть результат умножения числа *M* на 14. Проделайте еще несколько умножений числа *M*.

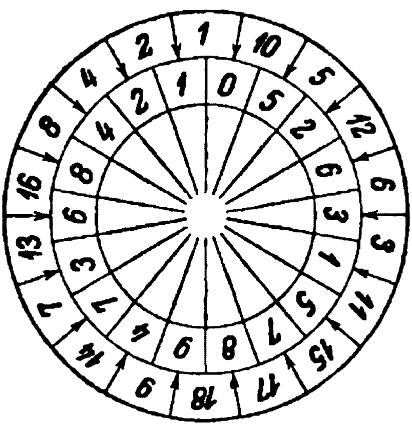


Рис. 215. Диск мгновенного умножения

Произведение числа M на 19 уже совсем иное; оно состоит из одних девяток, и вы немедленно догадываетесь, что число M представляет собой период дроби $\frac{1}{19}$ при ее обращении в десятичную. Период этой дроби оказался «полным» (содержит 18 цифр), следовательно, он обладает свойством «цикличности» (повторяемости одних и тех же цифр), описанным в задаче 324, чем и объясняется «секрет» нашего диска.

Приготовьте из картона еще десяток разных дисков мгновенного умножения из периодов других дробей и демонстрируйте друзьям свою «феноменальную способность» быстрого счета.

315. Умственная гимнастика

Попробуйте в уме умножить 142 857 ну хотя бы на 493 или на любое другое трехзначное или двузначное число. Не думайте, что это очень трудно. Не нужно обладать какими-то особыми вычислительными способностями, чтобы дать ответ в течение одной минуты, а при сноровке и того быстрее.

Вспомните свойство числа 142 857, связанное с умножением его на какое-либо двузначное или трехзначное число: если в семизначном произведении зачеркнуть одну, а в восьми- и девятизначных произведениях две и три первые цифры и прибавить их к последним цифрам соответствующего произведения, то получится одна из круговых перестановок числа 142 857 (см. задачу 313). Число 142 857 есть период дроби $\frac{1}{7}$ при обращении ее в десятичную.

Следовательно, умножение числа 142 857 на 493 сводится к умножению числа 493 на $\frac{1}{7}$ и обращению результата в периодическую дробь.

Как эти действия выполнить в уме?

Сначала выделите целую часть дроби $\frac{493}{7}$. Это будет 70; записываете 70 как *первые две* цифры результата. Остается дробь $\frac{3}{7}$, иначе говоря, период дроби $\frac{1}{7}$ (то есть 142 857), умноженный на 3.

Известно (см. задачу 313), что в этом случае получается одна из круговых перестановок числа 142 857, следовательно, задача сводится к тому, чтобы определить первую цифру результата.

Проще всего ее найти как первую цифру после запятой при делении 3 на 7; очевидно, это будет цифра 4.

(Первую цифру результата можно определить и другим способом: по последней цифре произведения числа 142 857 на 3. Так как $3 \times 7 = 21$, то последняя цифра произведения 1, значит, первой цифрой искомого периода будет та, которая следует за цифрой 1 в числе 142 857, то есть 4.)

Найденная цифра 4 определяет всю последовательность цифр периода: 428 571. Продолжайте составлять искомый результат: к ранее записанным двум первым цифрам результата, то есть к 70, припишите справа 4285, а от 71, которое заканчивает период, отнимите число 70, образованное первыми двумя цифрами результата; это даст вам последние две цифры (01) искомого произведения 142 857 на 493.

Итак, окончательно,

$$142\,857 \times 493 = 70\,428\,501.$$

Этот пример устного умножения долго было описывать, выполнить же его можно действительно чрезвычайно быстро.

Уяснив сущность способа и попрактиковавшись (это будет хорошей умственной гимнастикой), вы можете поразить своих еще неосведомленных друзей быстротой счета.

Напишите на листке бумаги множимое 142 857, а товарищу предложите написать любой множитель из двух или трех цифр. После небольшого раздумья вы записываете готовый результат умножения.

Пусть предложено, например, умножить 142 857 на 816. Устно преобразуем дробь $\frac{816}{7}$; $\frac{816}{7} = 116\frac{4}{7}$; запишем пока 116. Первая цифра следующей части результата 5 (как первая цифра после запятой в частном 4 : 7). Эта цифра определяет последовательность остальных: 571 428, но от последних цифр отнимаем ранее найденное 116 и остаток 571 312 приписываем к 116. Получается:

$$142\,857 \times 816 = 116\,571\,312,$$

и ваши способности «необыкновенного счетчика», безусловно, будут признаны.

Может так случиться, что множитель разделится на 7 и без остатка. Разберем этот случай на примере: 142 857 × 378. Имеем:

$$\frac{378}{3} = 54 = 53\frac{7}{7};$$

первые цифры результата: 53. Произведение числа 142 857 на 7 состоит, как известно, из шести девяток. Вычитаем устно 53 из 999 999 и приписываем разность справа от 53. Получаем:

$$142\,857 \times 378 = 53\,999\,946.$$

316. Узоры цифр

Цифры, соединяясь в числа и участвуя по нашей воле в математических действиях, образуют иной раз весьма причудливые и по-своему красивые числовые к омбинации, напоминающие кристаллические узоры снежинок на стекле окна.

I. Взгляните, например, на следующей странице на эти самые обыкновенные действия умножения, выполненные правильно, но своеобразно.

II. Еще восемь произведений:

$$\begin{array}{ll} 1738 \times 4 = 6952, & 483 \times 12 = 5796, \\ 1963 \times 4 = 7852, & 297 \times 18 = 5346, \\ 198 \times 27 = 5346, & 157 \times 28 = 4396, \\ 138 \times 42 = 5796, & 186 \times 39 = 7254. \end{array}$$

Множимое, множитель и произведение в каждом действии содержат девять *разных* цифр.

* * *

III. Равенства правильные, и обе стороны равенств выражаются одними и теми же цифрами:

$$\begin{array}{ll} 42 : 3 = 4 \times 3 + 2, & \sqrt{121} = 12 - 1, \\ 63 : 3 = 6 \times 3 + 3, & \sqrt{64} = 6 + \sqrt{4}, \\ 95 : 5 = 9 + 5 + 5, & \sqrt{49} = 4 + \sqrt{9} = 9 - \sqrt{4}, \\ (2 + 7) \times 2 \times 16 = 272 + 16, & \sqrt{169} = 16 - \sqrt{9} = \sqrt{16} + 9, \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 77 \\ \times\ 77 \\ \hline 49 \\ 4949 \\ 49 \\ \hline 5929 \end{array} \qquad \text{или} \qquad \begin{array}{r} 77 \\ \times\ 77 \\ \hline 7 \\ 777 \\ \hline 847 \end{array} \times 7 = 5929$$

$$\begin{array}{r} 666 \\ \times\ 666 \\ \hline 36 \\ 3636 \\ 363636 \\ 3636 \\ 36 \\ \hline 443556 \end{array} \qquad \text{или} \qquad \begin{array}{r} 666 \\ \times\ 666 \\ \hline 6 \\ 666 \\ 66666 \\ \hline 73926 \end{array} \times 6 = 443556$$

$$\begin{array}{c} 777777777777 \\ \times\ 777777777777 \\ \hline 49 \\ 4949 \\ 494949 \\ 49494949 \\ 4949494949 \\ 494949494949 \\ 49494949494949 \\ 4949494949494949 \\ 494949494949494949 \\ 49494949494949494949 \\ 4949494949494949494949 \\ 494949494949494949494949 \\ 4949494949494949494949 \\ 49494949494949494949 \\ 494949494949494949 \\ 4949494949494949 \\ 49494949494949 \\ 494949494949 \\ 4949494949 \\ 49494949 \\ 494949 \\ 4949 \\ 49 \\ \hline 604938271603728395061729 \end{array} \qquad \text{или} \qquad \begin{array}{c} 777777777777 \\ \times\ 777777777777 \\ \hline 7 \\ 777 \\ 77777 \\ 7777777 \\ 777777777 \\ 77777777777 \\ 7777777777777 \\ 777777777777777 \\ 77777777777777777 \\ 7777777777777777777 \\ 777777777777777777777 \\ 77777777777777777777777 \\ \hline 86419753086246913580247 \\ \times\ 7 \\ \hline 604938271603728395061729 \end{array}$$

$5^{6-2} = 625$,

$(8 + 9)^2 = 289$,

$2^{10} - 2 = 1022$,

$2^{8-1} = 128$,

$4 \times 2^3 = 4^3 : 2 = 34 - 2$,

$\sqrt{25}6 = 2 \times 5 + 6$,

$\sqrt{3}24 = 3 \times (2 + 4)$,

$\sqrt{11}\,881 = 118 - 8 - 1$,

$\sqrt{19}36 = -1 + 9 + 36$,

$\sqrt{13}31 = 1 + 3 + 3 + 1 + 3$.

Придумайте аналогичные красивые примеры.

* * *

IV. Вот наши снежинки-цифры образовали такой «узор»: произведение некоторого числа на сумму чисел, составленных из его цифр

$$37 \times (3 + 7).$$

Вдруг первый множитель «растаял», а то, что осталось, обратилось в сумму кубов: $3^3 + 7^3$ и — представьте — результат не изменился:

$$37 \times (3 + 7) = 3^3+7^3.$$

Взгляните: еще одно число умножается на сумму чисел, составленных из его цифр:

$$48 \times (4 + 8).$$

С ним происходит то же самое: первый множитель исчезает, остальное заменяется суммой кубов: $4^3 + 8^3$, а результат сохраняется:

$$48 \times (4 + 8) = 4^3 + 8^3.$$

А вот сразу четыре аналогичных «узора»:

$$147 \times (14 + 7) = 14^3 + 7^3,$$
$$148 \times (14 + 8) = 14^3 + 8^3,$$
$$111 \times (11 + 1) = 11^3 + 1^3,$$
$$1 \times 2 \times 3 \times (1 + 2 + 3) = 1^3 + 2^3 + 3^3.$$

* * *

V. Еще две снежинки-цифры 1 и 6 образовали число

$$16 = 4^2.$$

Но вот между цифрами 1 и 6 расположилась такая «снежинка»: 15. Образовалось новое число 1156; оно не перестало быть квадратом:

$$1156 = 34^2.$$

Вновь падает такая же «снежинка» 15 и попадает в самую середину записи числа 1156. Образовалось теперь число 111 556, которое по-прежнему остается точным квадратом:

$$111\,556 = 334^2.$$

Снежинка за снежинкой падают числа 15, и каждое метко попадает в центральную часть записи числа. Число от этого «удлиняется», но неизменно остается квадратом, сколько бы ни продолжался «цифропад»:

$$11\,115\,556 = 3334^2,$$
$$1\,111\,155\,556 = 33\,334^2,$$
$$111\,111\,555\,556 = 333\,334^2 \text{ и т.д.}$$

Процесс, по-видимому, происходит закономерно, но для полной уверенности в его закономерности следует, конечно, доказать, что всякое число, у которого n старших разрядов (где n — любое натуральное число), занято цифрой 1; $n - 1$ следующих разрядов занято цифрой 5, а последний разряд, разряд единиц, занят цифрой 6, то есть число

$$N = \underbrace{11...1}_{n \text{ раз}}\,\underbrace{55..5}_{(n-1) \text{ раз}}6$$

будет точным квадратом какого-то целого числа. Доказать это можно по-разному. Небольшая доля смекалки — и вы найдете сравнительно короткое доказательство утверждения, что при любом n число N будет точным квадратом числа $\frac{10^n + 2}{3}$.

Докажите самостоятельно, что при любом целом и положительном n:

$$1)\ \frac{10^n+2}{3} \text{ — число целое,}$$

$$2)\ \frac{10^n+2}{3} = \underbrace{33...3}_{n \text{ раз}} + 1.$$

317. Одна за всех и все за одну

I. Чтобы написать все числа от 1 до 26, достаточно, конечно, иметь в своем распоряжении все десять цифр: 0, 1, 2,..., 9. Достаточно, но не необходимо. При желании можно обойтись всего лишь одной цифрой 2, используя ее при этом *ровно* по пять раз для записи каждого числа и пользуясь только четырьмя арифметическими действиями, включая возведение в квадрат, и скобками. Займитесь на досуге этой умственной гимнастикой.

Вот для примера первый десяток чисел:

$$1 = 2 + 2 - 2 - \frac{2}{2}, \qquad 6 = 2 + 2 + 2 + 2 - 2,$$

$$2 = 2 + 2 + 2 - 2 - 2, \qquad 7 = 22 : 2 - 2 - 2,$$

$$3 = 2 + 2 - 2 + \frac{2}{2}, \qquad 8 = 2 \times 2 \times 2 + 2 - 2,$$

$$4 = 2 \times 2 \times 2 - 2 - 2, \qquad 9 = 2 \times 2 \times 2 + \frac{2}{2},$$

$$5 = 2 + 2 + 2 - \frac{2}{2}, \qquad 10 = 2 + 2 + 2 + 2 + 2.$$

По приведенному образцу представьте и каждое из последующих 16 чисел (от 11 до 26 включительно).

Изобразить число 27 пятью двойками при таких условиях не удастся.

Еще раз напоминаю, что для изображения каждого числа должно быть использовано ровно пять двоек.

* * *

II. При помощи цифры 4, если условиться использовать ее непременно *четыре* раза, изобразите *все* целые числа в пределах от 1 до 10.

* * *

III. Для любителей числовых головоломок обобщим предыдущую задачу.

Изобразить целое число при помощи ровно четырех *любых* одинаковых цифр, соединяя их математическими знаками. Это значит: изобразить число четырьмя цифрами так, чтобы при замене этих цифр четверкой *любых* других одинаковых цифр (кроме нуля) получилось то же число.

Возьмем, например, изображение числа 3 четырьмя четверками:

$$3 = (4 + 4 + 4) : 4.$$

При этом способе изображения числа 3 цифру 4 можно заменить любой другой цифрой (кроме нуля). Например,

$$3 = (5 + 5 + 5) : 5 \text{ или } 3 = (8 + 8 + 8) : 8$$

и вообще

$$3 = (n + n + n) : n.$$

Но в изображении числа 5 при помощи четырех четверок: $5 = (4 \times 4 + 4) : 4$ — цифру 4 нельзя заменить никакой другой цифрой. Нужно отыскать, следовательно, другой способ изображения числа 5. При этом разрешается использовать знаки сложения, вычитания, умножения и деления, скобки. Если этих знаков окажется недостаточно, то еще

1) знак квадратного радикала: $\sqrt{\ }$ (имея в виду арифметическое значение корня, то есть только его положительное значение из положительного числа: $\sqrt{9} = 3$, но не -3);

2) знак факториала: !, этот знак ставится справа от числа и обозначает произведение всех натуральных чисел от 1 до этого числа включительно; например

$$5! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120;$$

вообще

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \ldots (n - 1)n;$$

3) точку перед числом (на уровне строки), например .4; точку перед числом и над числом, например .4. Первым символом принято в некоторых странах обозначать десятичную дробь: $.\dot{4} = 0{,}4$, а вторым — периодическую: $.4 = 0{,}(4)$. Напомню, что периодическая дробь точно заменяется простой дробью: $0{,}(4) = \frac{4}{9}$, $0{,}(n) = \frac{n}{9}$.

Подумайте над тем, как, пользуясь указанными математическими знаками, изобразить целое число при помощи любых четырех одинаковых цифр.

Примеры.

$$1 = (n:n)\times(n:n),$$

$$5 = \frac{n + .\dot{n}}{.\dot{n} + .\dot{n}},\ 16 = \frac{n}{.n} + \left(\sqrt{\frac{n}{.n}}\right)!,$$

где n — любая цифра от 1 до 9.

Пусть в последнем примере, скажем, $n = 7$, тогда

$$\frac{7}{.7} + \left(\sqrt{\frac{7}{.\dot{7}}}\right)! = \frac{7}{0{,}7} + \left(\sqrt{\frac{7}{0{,}(7)}}\right)! = 10 + \left(\sqrt{9}\right)! =$$
$$= 10 + 3! = 10 + 1\times2\times3 = 10 + 6 = 16.$$

Сами додумайтесь до изображения при помощи любых четырех одинаковых чисел (кроме нуля) всех целых чисел в промежутке от 1 до 21. Из указанного промежутка чисел мне пока не встречалось требуемое изображение только числа 14.

* * *

IV. Если одна цифра 2, использованная не более пяти раз, или одна цифра 4, использованная не более четырех раз, в состоянии заменить собой любую из цифр от 1 до 9, то и вся эта дружная семья цифр не остается в долгу.

Участвуя всей семьей сразу (но без нуля), они могут заменить собой любую цифру своего же семейства. Вот как, например, они заменяют 2 и 4:

$$2 = \frac{13\,458}{6729},\quad 4 = \frac{15\,768}{3942}.$$

Обе эти неправильных дроби содержат все цифры от 1 до 9, причем каждую только по одному разу.

Составляя аналогичные дроби из тех же цифр и используя каждую цифру только по одному разу, вы можете образовать числа 3, 5, 6, 7, 8 и 9, то есть все остальные однозначные числа, кроме 1.

Для изображения 1 посредством девяти цифр нужно придумать особый способ.

Не торопитесь заглядывать в ответ, сначала попытайтесь найти его самостоятельно.

* * *

V. Вернем изгнанника (нуль) в семейство остальных цифр. Теперь при помощи десяти различных цифр можно составить шесть таких дробей, что каждая из них будет равна 9.

Три дроби таковы:

$$9 = \frac{97\,524}{10\,836} = \frac{95\,823}{10\,647} = \frac{57\,429}{06\,381},$$

а остальные три составьте сами.

Единицу, конечно, тоже очень легко образовать из десяти цифр (составьте!). Можно попытаться составить и другие однозначные числа из всех десяти цифр.

318. Числовые находки

Бесконечно много разнообразных соотношений между числами. Одни из них значительны и становятся предметом серьезных исследований. Другие менее существенны; их свойства узки, единичны, но именно своей исключительностью они иногда и привлекательны. Назовем их «числовыми находками».

I. Среди целых чисел обнаружено несколько пар таких, что сумма и произведение чисел каждой пары отличаются только расположением цифр:

$$9 + 9 = 18, \qquad 9 \times 9 = 81,$$
$$24 + 3 = 27, \qquad 24 \times 3 = 72,$$

$$47 + 2 = 49, \qquad 47 \times 2 = 94,$$
$$263 + 2 = 265, \qquad 263 \times 2 = 526,$$
$$497 + 2 = 499, \qquad 497 \times 2 = 994.$$

* * *

II. Несколько пар двузначных чисел замечательны совсем другим свойством: произведение, составленное из пары чисел, не изменится, если в каждом из сомножителей переставить цифры. Взгляните:

$$12 \times 42 = 21 \times 24, \quad 24 \times 63 = 42 \times 36,$$
$$12 \times 63 = 21 \times 36, \quad 24 \times 84 = 42 \times 48,$$
$$12 \times 84 = 21 \times 48, \quad 26 \times 93 = 62 \times 39,$$
$$13 \times 62 = 31 \times 26, \quad 36 \times 84 = 63 \times 48,$$
$$23 \times 96 = 32 \times 69, \quad 46 \times 96 = 64 \times 69.$$

Есть еще четыре пары двузначных чисел, обладающих этим свойством. Найдите их.

* * *

III. А вот еще три пары последовательных чисел, *квадраты* которых пишутся теми же цифрами, но в измененном порядке:

$$13^2 = 169, \qquad 157^2 = 24\,649, \qquad 913^2 = 833\,569,$$
$$14^2 = 196, \qquad 158^2 = 24\,964, \qquad 914^2 = 835\,396.$$

* * *

IV. Нет ли среди целых чисел хотя бы одного, которое обладало бы следующими свойствами:

1) оно должно быть четвертой степенью суммы его же цифр (отсюда следует, что оно должно быть и точным квадратом некоторого числа);

2) если разбить его на три грани по две цифры, то сумма трех полученных двузначных чисел тоже должна быть точным квадратом;

3) если написать его в обратном порядке цифр и снова разбить на три грани по две цифры, то сумма и этих трех двузначных чисел должна быть точным квадратом.

В результате произведенных вычислений такое число было обнаружено. Вот оно:

234 256.

Убедитесь самостоятельно в том, что оно обладает всеми требуемыми свойствами.

* * *

V. Числа, подобно звездам, мы группируем в разнообразные числовые «созвездия».

«Созвездие» из шести чисел 2, 3, 7, 1, 5, 6 занятно тем, что сумма первых трех чисел равна сумме последних трех, но равны даже и суммы их квадратов:

$$2 + 3 + 7 = 1 + 5 + 6,$$
$$2^2 + 3^2 + 7^2 = 1^2 + 5^2 + 6^2.$$

Можно сказать, что эти числа 2, 3, 7, 1, 5 и 6 заменяют собой шесть неизвестных x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3 в системе уравнений

$$x_1 + x_2 + x_3 = y_1 + y_2 + y_3,$$
$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2.$$

Есть бесконечно много и других чисел, которые удовлетворяют этой системе уравнений. Интересно, как быстро удалось бы вам подобрать еще хотя бы одну группу из шести подходящих чисел?

Еще ярче «созвездия» из восьми чисел

0, 5, 5, 10, 1, 2, 8, 9

и из десяти чисел

1, 4, 12, 13, 20, 2, 3, 10, 16, 19.

В каждом из них сумма чисел первой половины равна сумме чисел второй половины, затем, как и в предыдущем примере, равны суммы квадратов тех же чисел; больше того, равны даже суммы кубов тех же чисел:

$$\begin{cases} 0 + 5 + 5 + 10 = 1 + 2 + 8 + 9, \\ 0^2 + 5^2 + 5^2 + 10^2 = 1^2 + 2^2 + 8^2 + 9^2, \\ 0^3 + 5^3 + 5^3 + 10^3 = 1^3 + 2^3 + 8^3 + 9^3, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 + 4 + 12 + 13 + 20 = 2 + 3 + 10 + 16 + 19, \\ 1^2 + 4^2 + 12^2 + 13^2 + 20^2 = 2^2 + 3^2 + 10^2 + 16^2 + 19^2, \\ 1^3 + 4^3 + 12^3 + 13^3 + 20^3 = 2^3 + 3^3 + 10^3 + 16^3 + 19^3. \end{cases}$$

Несомненно, имеются и другие группы чисел, связанных точно такими же соотношениями, но как их подобрать?

В «тайну» всех приведенных здесь «числовых созвездий» первыми проникли еще в середине XVIII века два петербургских академика: Гольдбах и гениальный Эйлер. Они нашли ряд формул, пригодных для решения в целых числах некоторых систем уравнений, в частности и тех, которые приводят к упомянутым «числовым созвездиям».

Так, для подбора чисел, образующих первое «созвездие»:

$$x_1 + x_2 + x_3 = y_1 + y_2 + y_3,$$
$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2,$$

оказались пригодными такие формулы:

$$\begin{matrix} & x_1 = a + c, & x_2 = b + c, & x_3 = 2a + 2b + c \\ \text{и} & y_1 = c, & y_2 = 2a + b + c, & y_3 = a + 2b + c. \end{matrix}$$

Нужно только заменить в этих формулах буквы a, b и c любыми числами, и вы получите столько чисел этого «созвездия», сколько захотите.

В частности, при $a = 1$, $b = 2$ и $c = 1$ получается «созвездие», приведенное в качестве первого примера: 2, 3, 7, 1, 5, 6.

Составьте другие группы чисел первого «созвездия», придавая буквам a, b и c разнообразные значения.

Эйлер и Гольдбах дали еще и другую группу формул для чисел первого «созвездия»:

$$\begin{matrix} x_1 = ad, & x_2 = ac + bd, & x_3 = bc, \\ y_1 = ac, & y_2 = ad + bc, & y_3 = bd, \end{matrix}$$

где a, b, c и d — тоже произвольные числа.

Для подбора чисел, образующих второе «созвездие»:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = y_1 + y_2 + y_3 + y_4, \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2, \\ x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3 = y_1^3 + y_2^3 + y_3^3 + y_4^3, \end{cases}$$

пригодны следующие формулы:

$$x_1 = a, \quad x_2 = b, \quad x_3 = 3a + 3b, \quad x_4 = 2a + 4b,$$
$$y_1 = 2a + b, \quad y_2 = a + 3b, \quad y_3 = 3a + 4b, \quad y_4 = 0.$$

Опять заменяйте буквы a и b любыми числами, и вы получите столько чисел второго «созвездия», сколько захотите.

Полезно проверить приведенные здесь формулы не только на частных примерах, но и в общем виде, заменяя в каждом уравнении все неизвестные их значениями.

* * *

VI. После Эйлера появилось много других числовых находок, связанных с так называемым решением уравнений в целых числах, примеры которого вам встречались и в двенадцатой главе (см. задачу 309). Труд, настойчивость и математическая смекалка все время пополняют наш сундучок с «числовыми созвездиями» новыми любопытными образцами.

Не хотите ли ознакомиться, например, с одним из новых, очень пышных «созвездий»? Суммы всех степеней, от первой до пятой, шести чисел: 1, 6, 7, 17, 18 и 23, равны суммам тех же степеней других шести чисел: 2, 3, 11, 13, 21 и 22:

$$1 + 6 + 7 + 17 + 18 + 23 = 2 + 3 + 11 + 13 + 21 + 22,$$
$$1^2 + 6^2 + 7^2 + 17^2 + 18^2 + 23^2 = 2^2 + 3^2 + 11^2 + 13^2 + 21^2 + 22^2,$$
$$1^3 + 6^3 + 7^3 + 17^3 + 18^3 + 23^3 = 2^3 + 3^3 + 11^3 + 13^3 + 21^3 + 22^3,$$
$$1^4 + 6^4 + 7^4 + 17^4 + 18^4 + 23^4 = 2^4 + 3^4 + 11^4 + 13^4 + 21^4 + 22^4,$$
$$1^5 + 6^5 + 7^5 + 17^5 + 18^5 + 23^5 = 2^5 + 3^5 + 11^5 + 13^5 + 21^5 + 22^5.$$

«Ключом» к получению других чисел этого «созвездия» служит тождество

$$a^n + (a + 4b + c)^n + (a + b + 2c)^n + (a + 9b + 4c)^n +$$
$$+ (a + 6b + 5c)^n + (a + 10b + 6c)^n = (a + b)^n + (a + c)^n +$$
$$+ (a + 6b + 2c)^n + (a + 4b + 4c)^n + (a + 10b + 5c)^n + (a + 9b + 6c)^n.$$

Замените буквы a, b и c любыми числами, а букве n придайте значения сначала 1, затем 2, 3, 4 и 5, и вы получите столько раз по пять равных сумм, сколько захотите.

* * *

VII. Вы еще можете сформировать красивые суммы квадратов двузначных чисел с *переставленными* цифрами. Для этого сначала составьте две группы с одинаковым количеством таких *однозначных* чисел, чтобы сумма квадратов чисел первой группы равнялась сумме квадратов чисел второй группы, например

$$4^2 + 5^2 + 6^2 = 8^2 + 3^2 + 2^2.$$

А теперь из чисел 4, 5, 6 и 8, 3, 2 составьте три двузначных числа, используя первые три числа как десятки, а последние три как единицы, объединяя их произвольным образом. У вас образуются непременно такие три двузначных числа, что сумма их квадратов будет равна сумме квадратов обращенных чисел.

Так, из групп чисел 4, 5, 6 и 8, 3, 2 можно образовать следующие равенства:

$$48^2 + 53^2 + 62^2 = 26^2 + 35^2 + 84^2,$$

или

$$43^2 + 52^2 + 68^2 = 86^2 + 25^2 + 34^2 \text{ и т.д.}$$

В этих равенствах все числа правой стороны будут обращенными числами левой стороны.

Обратите внимание еще на такую красивую черту этих равенств: цифры в каждом из них расположены симметрично относительно знака равенства.

Обобщая, можно сказать, что если n однозначных чисел x_1, $x_2,\ldots, x_n$ и n других однозначных чисел $y_1, y_2,\ldots, y_n$ связаны равенством

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2,$$

то непременно будет справедливо и такое равенство:

$$(10x_1 + y_1)^2 + (10x_2 + y_2)^2 + \ldots + (10x_n + y_n)^2 = (10y_n + x_n)^2 +$$
$$+ (10y_{n-1} + x_{n-1})^2 + \ldots + (10y_1 + x_1)^2.$$

Кто пожелает, может сам убедиться в этом, раскрывая скобки во втором равенстве и принимая во внимание первое. Поупражняйтесь в составлении таких сумм.

Возьмите, например, восемь первых чисел натурального ряда: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 и 8. Сообразите, какие из них должны быть числами группы x_1, x_2, x_3, x_4, а какие — числами группы y_1, y_2, y_3, y_4, а затем, следуя указанному правилу, составьте несколько равных сумм квадратов двузначных чисел с переставленными цифрами.

* * *

VIII. Новинкой же нашего сундучка с «числовыми созвездиями» будут и еще более замысловатые группы двузначных чисел с переставленными цифрами. Например,

$$13 + 42 + 53 + 57 + 68 + 97 =$$
$$= 79 + 86 + 75 + 35 + 24 + 31,$$
$$13^2 + 42^2 + 53^2 + 57^2 + 68^2 + 97^2 =$$
$$= 79^2 + 86^2 + 75^2 + 35^2 + 24^2 + 31^2,$$
$$13^3 + 42^3 + 53^3 + 57^3 + 68^3 + 97^3 =$$
$$= 79^3 + 86^3 + 75^3 + 35^3 + 24^3 + 31^3,$$

или

$$12 + 32 + 43 + 56 + 67 + 87 =$$
$$= 78 + 76 + 65 + 34 + 23 + 21,$$
$$12^2 + 32^2 + 43^2 + 56^2 + 67^2 + 87^2 =$$
$$= 78^2 + 76^2 + 65^2 + 34^2 + 23^2 + 21^2,$$
$$12^3 + 32^3 + 43^3 + 56^3 + 67^3 + 87^3 =$$
$$= 78^3 + 76^3 + 65^3 + 34^3 + 23^3 + 21^3.$$

Исследуйте, нет ли и здесь связи между суммами степеней однозначных чисел и искомыми суммами.

* * *

IX. Еще одна находка! Число 145 может быть выражено суммой факториалов (см. задачу 317, III) своих цифр: 145 =

= 1! + 4! + 5!. Неизвестно, имеются ли еще числа, обладающие таким же свойством.

* * *

X. Есть только два трехзначных числа, любая целая и положительная степень которых оканчивается теми же тремя цифрами и в том же порядке: 376 и 625.

Действительно,

$376^2 = 141\ 376$, $376^3 = 53\ 157\ 376$ и т.д.,
$625^2 = 390\ 625$, $625^3 = 244\ 140625$ и т.д.

Эта задача имеет короткое, но довольно замысловатое решение (вы найдете его в разделе с ответами). Разобраться в нем, конечно, полезно, но еще полезнее приложить собственные умственные усилия к отысканию решения.

319. Наблюдая ряд натуральных чисел...

I. Расположим натуральные числа 1, 2, 3, 4,... в форме треугольника (см. следующую страницу).

Вглядитесь в этот числовой треугольник, и вы, несомненно, обнаружите немало закономерностей в расположении чисел по строкам и столбцам, связей между числами и местами, занимаемыми ими, и т. п. Заметили ли вы, например, что

1) нижнее число каждого столбца — квадрат номера столбца;

2) произведение любых двух соседних чисел какой-либо строки есть число той же строки; например, $5 \times 11 = 55$; оба сомножителя и произведение вы найдете в *одной* строке; место в строке, занятое таким произведением, определяется как сумма числа 1 и числа, стоящего внизу того столбца, в котором находится меньший множитель; например, для $7 \times 13 = 91$ замечаем, что внизу столбца с числом 7 находится число 9, значит, число 91 расположено на $1 + 9 = 10$ месте той строки, в которой находятся сомножители 7 и 13; число $13 \times 21 = 273$ расположено на $1 + 16 = 17$ месте соответствующей строки;

										.	
										.....	
										....	
								50	....		
							37	51	....		
						26	38	52	....		
					17	27	39	53	....	107	....
				10	18	28	40	54	....	108	....
			5	11	19	29	41	55	....	109	....
		2	6	12	20	30	42	56	....	110	....
(*)	1	3	7	13	21	31	43	57	....	111	....
		4	8	14	22	32	44	58	....	112	....
			9	15	23	33	45	59	....	113	....
				16	24	34	46	60	....	114	....
					25	35	47	61	....	115	....
						36	48	62	....		
							49	63	....		
								64	....		
										....	
										.....	
										.	

3) все числа строки, отмеченной звездочкой (*), получаются по формуле $n^2 - n + 1$, где $n = 1, 2, 3, 4, 5...$; в этой строке после числа 3 каждое третье число делится на 3; каждое седьмое число после числа 7 или 21 делится на 7; каждое тринадцатое число после 13 или 91 делится на 13 и т. д.; аналогичными свойствами обладают числа каждой строки.

* * *

II. Нельзя ли всю последовательность натуральных чисел 1, 2, 3, 4, 5, ..., $n - 1$, n, $n + 1$,... в порядке их следования разбить на *пары равных сумм*?

Попробуем. Первая пара сразу бросается в глаза: $1 + 2 = 3$. Испытаем следующие числа: $4 + 5 + 6 = 7 + 8$.

Пока удается. Еще несколько попыток, и опять успех:

$$9 + 10 + 11 + 12 = 13 + 14 + 15.$$

Замечаем, что количество слагаемых нарастает, но нарастает закономерно: каждый раз как в левой части равенства, так и в правой прибавляется по одному слагаемому, причем в левой части каждого равенства слагаемых на одно больше, чем в правой. Проверим это на следующей паре сумм:

$$16 + 17 + 18 + 19 + 20 = 21 + 22 + 23 + 24.$$

Подтверждается!

Посмотрим теперь, что представляет собой *наименьшее* слагаемое (крайнее слева) каждой пары равных сумм. Наблюдения показывают, что оно есть *квадрат* числа слагаемых той суммы, в которой слагаемых меньше.

В самом деле, правая часть первого равенства состоит из *одного* числа (3) и наименьшее слагаемое в этом равенстве 1^2; в правой части второго равенства — *два* слагаемых $(7 + 8)$, и наименьшее слагаемое в этом равенстве 2^2; в правой части третьего равенства — *три* слагаемых, и наименьшее слагаемое в этом равенстве 3^2 и т. д.

Последняя закономерность позволяет быстро написать пару равных сумм, соответствующих заранее намеченному числу слагаемых.

Пусть, например, требуется найти 7 последовательных чисел, удовлетворяющих условию. Определяем наименьшее слагаемое: $7 - 1 = 6$, $6^2 = 36$.

Следовательно, искомая пара равных сумм такова:

$$36 + 37 + 38 + 39 + 40 + 41 + 42 =$$
$$= 43 + 44 + 45 + 46 + 47 + 48.$$

Итак, наблюдения показали, что сумма $n + 1$ последовательных чисел, в которой наименьшее слагаемое n^2, равна сумме n следующих за ними чисел. Если первое слагаемое *первой* суммы n^2, то второе слагаемое этой суммы, по условию, на 1 больше, третье слагаемое на 2 больше, четвертое на 3 больше, $(n + 1)$ – е слагаемое на n больше, чем первое; значит, последнее слагаемое первой суммы будет $n^2 + n$. Отсюда первое слагаемое *второй* суммы, по условию, $n^2 + n + 1$, второе слагаемое, как и раньше, на 1 больше, третье — на 2 больше, n-е слагаемое на $n - 1$ больше, чем первое; значит, последнее слагаемое второй суммы будет:

$$n^2 + n + 1 + (n - 1), \text{ или } n^2 + 2n.$$

Окончательно результат наших наблюдений можно выразить в следующей алгебраической форме:

$$\underbrace{n^2 + (n^2 + 1) + (n^2 + 2) + \ldots + (n^2 + n) =}_{(n+1) \text{ слагаемых}}$$

$$= \underbrace{(n^2 + n + 1) + (n^2 + n + 2) + \ldots + (n^2 + 2n)}_{n \text{ слагаемых}}.$$

Знакомые с формулой суммы чисел, составляющих арифметическую прогрессию, без больших усилий докажут справедливость этого равенства.

* * *

III. После успешных наблюдений над суммами натуральных чисел обратимся к суммам *квадратов* натуральных чисел.

Рассмотрим прежде всего сумму квадратов n последовательных натуральных чисел:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (n - 1)^2 + n^2.$$

Это — не прогрессия. Для определения этой суммы нужна специальная формула, и она приводится в учебниках алгебры:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n\,(n + 1)\,(2n + 1)}{6}.$$

Если складываются квадраты только четных или, наоборот, только нечетных чисел натурального ряда, то нужны другие формулы. Сумму *квадратов* всех *нечетных* чисел от 1 до 9 можно, например, вычислить по такой формуле:

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + 9^2 = \frac{1}{6}(10^3 - 10).$$

В применении же к сумме *квадратов* всех *четных* чисел от 2 до 10 удобен такой вид формулы:

$$2^2 + 4^2 + 6^2 + 8^2 + 10^2 = \frac{1}{6}(11^3 - 11).$$

Складывая эти два равенства, получим такую разновидность формулы для суммы квадратов всех целых чисел от 1 до 10:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots 10^2 = \frac{1}{6}[10^3 + 11^3 - (10 + 11)].$$

Сами распространите эти формулы на любое количество слагаемых.

IV. Среди натуральных чисел нет даже двух последовательных *кубов*, сумма которых равнялась бы кубу следующего числа. Убедиться в этом поможет алгебра.

Если любые три последовательных числа обозначить, как $x - 1$, x, $x + 1$, то, по условию,

$$(x - 1)^3 + x^3 = (x + 1)^3,$$

или после преобразований:

$$x^3 - 6x^3 - 2 = 0.$$

Придадим получившемуся кубическому уравнению такой вид:

$$x^2 (x - 6) = 2.$$

Легко обнаружить, что этому уравнению не удовлетворит ни одно целое число. В самом деле, правая часть уравнения — число положительное, следовательно, x должен быть больше 6. Самое меньшее возможное значение для x – 7. Но при $x = 7$ левая часть уравнения значительно превысит правую и будет превышать ее при всех последующих значениях x, то есть убеждаемся, что действительно среди целых чисел нет корней получившегося кубического уравнения.

Однако любителям подобного рода числовых головоломок удалось и из кубов последовательных чисел закономерно составить равные суммы, правда, всякий раз с некоторыми добавлениями:

$$[5^3 + 6^3] + 1^3 = [7^3] - 1^3,$$
$$[16^3 + 17^3 + 18^3] + (1^3 + 2^3) = [19^3 + 20^3] - (1^3 + 2^3),$$
$$[33^3 + 34^3 + 35^3 + 36^3] + (1^3 + 2^3 + 3^3) =$$
$$= [37^3 + 38^3 + 39^3] - (1^3 + 2^3 + 3^3) \text{ и т.д.}$$

В квадратных скобках — суммы кубов последовательных чисел, причем опять на каждые n слагаемых в правой скобке приходится $n + 1$ слагаемых в левой скобке; в круглых скобках как справа, так и слева — одинаковые суммы кубов последовательных чисел, начиная с 1.

Замечено при этом, что подчеркнутое число (без показателя степени) в каждом равенстве связано с числом слагаемых в квадратных скобках следующим образом: подчеркнутое число равно *утроенному произведению* числа членов слева на число членов справа (в квадратных скобках). Так, в первом равенстве в левой квадратной скобке два члена, а в правой один, и, следовательно,

$$3(2 \times 1) = \underline{6}.$$

Во втором равенстве в левой квадратной скобке три члена, а в правой два, и соответственно

$$3(3 \times 2) = \underline{18}.$$

В третьем равенстве

$$3(4 \times 3) = \underline{36}.$$

Не останавливаясь на выяснении общности подмеченной закономерности, ограничимся составлением и практической проверкой равенства таких курьезных сумм еще для одного частного случая. Пожелаем, например, чтобы в левой квадратной скобке было пять слагаемых, а в правой четыре. Утроим их произведение: $3(5 \times 4) = \underline{60}$. Тогда

$$[56^3 + 57^3 + 58^3 + 59^3 + 60^3] + (1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3) =$$
$$= [61^3 + 62^3 + 63^3 + 64^3] - (1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3).$$

Убедитесь арифметически в справедливости этого равенства!

Между прочим, аналогичные закономерности можно подметить также и у равных сумм самих натуральных чисел и их квадратов. Вспомните, какие мы имели равенства:

для первых степеней:

$$1 + \underline{2} = 3,$$
$$4 + 5 + \underline{6} = 7 + 8,$$
$$9 + 10 + 11 + \underline{12} = 13 + 14 + 15;$$

подчеркнутое число равно *произведению* числа слагаемых слева и справа от знака равенства;

для вторых степеней:

$$3^2 + \underline{4}^2 = 5^2,$$
$$10^2 + 11^2 + \underline{12}^2 = 13^2 + 14^2,$$
$$21^2 + 22^2 + 23^2 + \underline{24}^2 = 25^2 + 26^2 + 27^2;$$

подчеркнутое число (без показателя степени) равно *удвоенному произведению* числа слагаемых слева на число слагаемых справа (от знака равенства).

* * *

V. Знакома ли вам такая таблица умножения:

1	2	3	4	5	...	...	p	...	n
2	4	6	8	10	...	...	$2p$	...	$2n$
3	6	9	12	15	...	...	$3p$	...	$3n$
4	8	12	16	20	...	...	$4p$	...	$4n$
5	10	15	20	25	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
p	$2p$	$3p$	$4p$	...	...	...	p^2	...	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
n	$2n$	$3n$	$4n$	...	...	...	...	...	n^2

Произведение какого-нибудь числа верхней строки на любое число крайнего слева столбца расположено на пересечении столбца и строки, занимаемых сомножителями. Так, например, число 12 расположено на пересечении четвертого столбца и третьей строки или шестого столбца и второй строки.

Но, рассматривая внимательно эту таблицу, вы найдете еще несколько любопытных соотношений:

а) Сумма чисел в любом квадрате с вершиной в левом верхнем углу таблицы есть полный квадрат (то есть представляет собой квадрат некоторого числа):

$$1 = 1^2,$$
$$1 + 2 + 2 + 4 = 3^2 = (1+2)^2,$$
$$1 + 2 + 3 + 2 + 4 + 6 + 3 + 6 + 9 = 6^2 = (1 + 2 + 3)^2$$

и т. д.

б) Каждый из вышеупомянутых квадратов образуется путем присоединения к предыдущему квадрату согнутой под прямым углом полоски, называемой гномоном. Сумма чисел в любом гномоне представляет собой куб некоторого числа:

$$1 = 1^3,$$
$$2 + 4 + 2 = 2^3,$$
$$3 + 6 + 9 + 6 + 3 = 3^3 \text{ и т. д.}$$

в) Каждый из вышеупомянутых квадратов состоит из 1, 2, 3, …, n гномонов. Отсюда следует формула, известная еще с античных времен:

$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \ldots + n)^3.$$

* * *

VI. В классической формуле для суммы кубов слагаемыми будут по порядку идущие числа натурального ряда: 1, 2, 3, 4 и т. д. Французский математик Жозеф Лиувилль поставил более широкую задачу: найти произвольные целые числа a, b, c, d, …, сумма кубов которых равнялась бы квадрату их суммы:

$$a^3 + b^3 + c^3 + \ldots = (a + b + c + \ldots)^3.$$

Среди чисел $a, b, c, d, \ldots$ допускаются и равные между собой.

Подобрать подходящие числа, не руководствуясь при этом каким-нибудь правилом, просто наудачу — дело почти безнадежное.

Сделайте все-таки две-три попытки, а потом продолжайте чтение.

Лиувиллю удалось получить занятный результат, суть которого легко уяснить на следующих двух примерах.

Пример 1. Возьмем число 6. Оно делится на 1, 2, 3 и 6. А сколько же делителей у каждого из этих делителей? У числа 1 — *один* делитель, у числа 2 — *два* делителя (1 и 2), у числа 3 — *два* делителя (1 и 3) и, наконец, у числа 6 — *четыре* делителя (1, 2, 3 и 6). Вот эти числа делителей 1, 2, 2 и 4 и удовлетворяют интересующему нас соотношению, то есть имеем:

$$1^3 + 2^3 + 2^3 + 4^3 = (1 + 2 + 2 + 4)^3 = 81.$$

Пример 2. Возьмем число 30. Его делители: 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30. Число делителей у каждого из них соответственно 1, 2, 2, 2, 4, 4, 4, 8. Имеем:

$$1^3 + 2^3 + 2^3 + 2^3 + 4^3 + 4^3 + 4^3 + 8^3 =$$
$$= (1 + 2 + 2 + 2 + 4 + 4 + 4 + 8)^3.$$

Способ простой и остроумный. Примените его самостоятельно к другим числам.

* * *

VII. Всякий, кто заинтересовался рассмотренными разнообразными зависимостями, связывающими натуральные числа, не мог не заметить простейших свойств их сумм, в частности сумм *нечетных* чисел: 1, 3, 5, ..., $(2n - 1)$.

Сумма первых *двух* нечетных чисел 1 + 3 равна 2^2, квадрату числа 2.

Сумма первых *трех* нечетных чисел 1 + 3 + 5 равна 3^2, квадрату числа 3.

Сумма первых *четырех* нечетных чисел 1 + 3 + 5 + 7 равна 4^2, квадрату числа 4 и т. д.

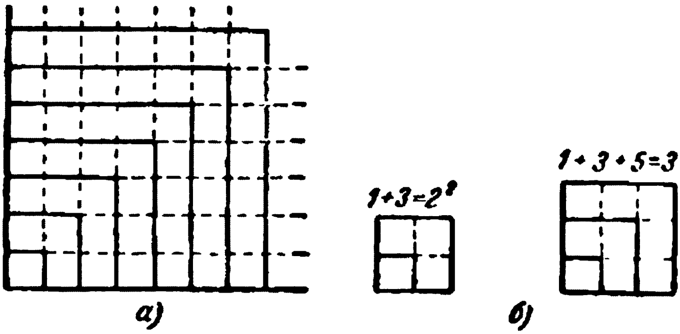


Рис. 216. Свойство сумм нечетных чисел

Это свойство сумм нечетных чисел становится весьма наглядным, если представить себе квадрат (рис. 216, *а*), разделенный на согнутые под прямым углом полоски (гномоны), каждый из которых состоит из единичных квадратов и будет иллюстрацией нечетного числа. Последовательное присоединение гномонов к первому единичному квадрату не нарушает формы квадрата (рис. 216, *б*) и тем самым иллюстрирует свойство суммы нечетных чисел образовывать квадратное число

Естественно предположить, что подмеченная закономерность сохраняется для суммы любого количества n первых нечетных чисел, то есть что эта сумма всегда равна квадрату числа слагаемых:

$$\underbrace{1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1)}_{n \text{ слагаемых}} = n^2.$$

А вдруг это предположение не подтвердится? Не перестанут ли наши суммы подчиняться найденному закону, начиная с какого-нибудь, может быть, очень большого, числа слагаемых?

С закономерностями, обнаруженными опытным путем, вполне может так случиться.

Так как ряд натуральных чисел бесконечен, то опытным путем невозможно проверить подмеченную закономерность для сумм нечетных чисел. Но в этом и нет необходимости. Математика имеет средства предвидеть результат.

Рассуждаем так: пусть для какого-нибудь числа k слагаемых справедливо утверждение, что их сумма равна квадрату их числа:

$$\underbrace{1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1)}_{k \text{ слагаемых}} = k^2.$$

Прибавим теперь следующее нечетное число $2k + 1$, и посмотрим, сохранится ли та же закономерность для суммы $k + 1$ слагаемых:

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1) + (2k + 1) = k^2 + 2k + 1 = (k + 1)^2.$$

Закономерность сохранилась!

Сумма по-прежнему равна квадрату числа слагаемых. Так мы установили, что если предполагаемая закономерность имеет место хотя бы для одного какого-нибудь числа k слагаемых, то она остается справедливой и для числа слагаемых, на единицу большего, чем k.

Значит, опытную проверку закономерности *нужно* произвести, но *только один раз*. Возьмем самое меньшее число слагаемых: два. Имеем: $1 + 3 = 2^2$. Сумма двух слагаемых ($k = 2$) равна квадрату числа слагаемых. Следовательно, по доказанному, закономерность сохранится и для трех членов ($k + 1 = 3$); но если она верна для трех слагаемых ($k = 3$), то она сохранится и для четырех ($k + 1 = 4$); если она верна для $k = 4$, то она сохранится и для $k + 1 = 5$; если она верна для $k = 5$, то она сохранится и для $k + 1 = 6$ и т.д.

Этот простой, но строгий способ рассуждений называется математической индукцией.

Итак, сомнения рассеяны! Сумма n первых нечетных чисел при любом числе n слагаемых равна квадрату числа слагаемых. В справедливости формулы

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$$

для любого n можно было бы убедиться простым подсчетом суммы

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1)$$

по формуле для суммы членов арифметической прогрессии (сделайте!), но по сути дела это был бы тот же способ рассуждений, так как применимость формулы для суммы членов арифметической прогрессии тоже опирается на принцип математической индукции.

320. Назойливая разность

Напишите четырехзначное число, не все цифры которого одинаковы. Из цифр написанного числа составьте два новых числа: M — наибольшее возможное число и m — наименьшее возможное. Найдите разность $d = M - m$ и проделайте то же самое с полученной разностью. Повторяя эти действия некоторое число раз, вы непременно придете к разности 6174, которая все время и будет повторяться при продолжении процесса.

Пусть, например, первоначальное число есть 4818.

$M_1 = 8841$; $m_1 = 1488$; $d_1 = 7353$;
$M_2 = 7533$; $m_2 = 3357$; $d_2 = 4176$;
$M_3 = 7641$; $m_3 = 1467$; $d_3 = 6174$;
$M_4 = 7641$; $m_4 = 1467$; $d_4 = 6174$ и т. д.

Как доказать, что это явление имеет место для *любого* четырехзначного числа?

Для доказательства этого свойства достаточно убедиться в его справедливости для тридцати четырехзначных чисел.

Какие это числа?

Нельзя ли еще уменьшить необходимое количество испытуемых чисел?

321. Симметричная сумма

Напишите любое целое число в два, три или больше знаков. Прибавьте к нему число с переставленными цифрами. То же самое проделайте с полученной суммой. Опыт показывает, что, повторяя эти действия некоторое число раз, вы непременно в каком-либо из результатов получите число, которое одинаково читается слева направо и справа налево

Несколько примеров:

+ 38	+ 139	+ 48 017
83	931	71 084
121	+ 1070	+ 119 101
	0701	101 911
	1771	+ 221 012
		210 122
		431 134

Иногда для достижения симметричного результата приходится делать большое число шагов. Если, например, вы начнете с числа 89, то ожидаемый результат получится не скоро. Только двадцать четвертый шаг приведет к симметричному результату: 8 813 200 023 188.

Убедитесь!

А может быть, найдется и такое число, которое никогда не приведет к симметричному результату? По-видимому, нет, но это *никем еще не доказано*!

Глава четырнадцатая

ЧИСЛА ДРЕВНИЕ, НО ВЕЧНО ЮНЫЕ

А. Первоначальные числа

322. Числа простые и составные

Число a называется делителем целого числа N, если в результате деления N на a получается снова число целое.

Самое меньшее целое число 1. Оно делится без остатка только на самого себя; значит, у числа 1 только один делитель. Всякое другое целое число имеет либо два делителя (единицу и самого себя), либо больше чем два делителя.

Только на единицу и на себя делятся, например, такие числа, как 2, 3, 5, 7.

Число 4 имеет три делителя: 1, 2 и 4; число 6 — четыре делителя: 1, 2, 3 и 6.

Числа, имеющие только два делителя, условились называть *простыми*, или *первоначальными*, числами. Числа, у которых больше чем два делителя, называются *составными*.

Наименьшим простым числом будет число 2. Это единственное четное простое число. Все остальные простые числа, очевидно, следует искать только среди нечетных чисел, но, разумеется, далеко не всякое нечетное число — простое.

Так, например, нечетные числа 3, 5, 7, 11, 13 — простые, а такие нечетные числа, как 9, 15, 21, — составные; 9 имеет три делителя: 1, 3, 9, число 15 — четыре делителя: 1, 3, 5, 15 и т.д.

Любое составное число можно разлагать на сомножители до тех пор, пока оно не распадется на одни только простые числа. Например, $12 = 2 \times 2 \times 3$; $363 = 3 \times 11 \times 11$ и т. д.

Простые числа представляют собой как бы первичные элементы, из которых составляются все числа. Понятен поэтому интерес к простым числам со стороны математиков.

323. «Эратосфеново решето»

Как же выбрать простые числа из состава всех целых чисел? Очевидно, что чем больше число, тем труднее решать вопрос, имеет ли оно делителей, меньших себя.

Когда зерна отделяют от примесей, применяют специальные сита с отверстиями, соответствующими размерам зерен.

Вот таким же примерно способом отделяют и простые числа от составных.

Требуется, предположим, выделить все простые числа в пределах от 2 до некоторого данного целого числа N. Выпишем сначала подряд все целые числа от 2 до N: 2, 3, 4, 5,..., N. Первое простое число 2. Подчеркнем его, а все числа, кратные двум (четные), зачеркнем. Первое из оставшихся чисел 3. Подчеркнем его как простое, а все числа «через два на третье» (то есть кратные трем) зачеркнем. Первое число из оставшихся теперь 5 (число 4 уже зачеркнуто). Подчеркиваем его как простое и зачеркиваем все числа «через четыре на пятое» (то есть кратные пяти) и т. д.

Все подчеркнутые числа и образуют таблицу простых чисел в пределах от 2 до N:

$\underline{2}$, $\underline{3}$, $\cancel{4}$, $\underline{5}$, $\cancel{6}$, $\underline{7}$, $\cancel{8}$, $\cancel{9}$, $\cancel{10}$,

$\underline{11}$, $\cancel{12}$, $\underline{13}$, $\cancel{14}$, $\cancel{15}$, $\cancel{16}$, $\underline{17}$, $\cancel{18}$, $\underline{19}$, $\cancel{20}$,

$\cancel{21}$, $\cancel{22}$, $\underline{23}$, $\cancel{24}$, $\cancel{25}$, $\cancel{26}$, $\cancel{27}$, $\cancel{28}$, $\underline{29}$, $\cancel{30}$,

$\underline{31}$, $\cancel{32}$, $\cancel{33}$, $\cancel{34}$, $\cancel{35}$, $\cancel{36}$, $\underline{37}$, $\cancel{38}$, $\cancel{39}$, $\cancel{40}$,

. . . .

Такой способ постепенного «просеивания» чисел был придуман более 2000 лет назад греческим математиком Эратосфеном

(276–196 гг. до н. э.). Эратосфен не зачеркивал числа, кратные 2, 3, 5 и т.д., а прокалывал дырочки над ними. Получалось нечто вроде решета, сквозь отверстия которого как бы просеивались составные числа, а простые оставались. Так до сих пор этот способ получения таблицы простых чисел и называется *эратосфеновым решетом*.

Способ, как видите, очень кропотливый, но вполне надежный.

Коллективными усилиями таблица простых чисел с каждым годом все увеличивается. За ее пределами известны только отдельные простые числа. Так, например, математик-самоучка И. М. Первушин в 1883 г. доказал, что число

$$2^{61} - 1 = 2\,305\,843\,009\,213\,693\,951$$

есть число простое.

Длительное время число

$$2^{127} - 1 = 170\,141\,183\,460\,469\,231\,731\,687\,303\,715\,884\,105\,727$$

было наибольшим известным простым числом. Сейчас таким числом будет $2^{57885161} - 1$.

Математикам, естественно, хотелось создать такую общую формулу, которая в зависимости от всевозможных целых значений величины n давала бы только простые числа. Но, увы, такая формула оказалась «синей птицей». Ее так никто до сих пор и не поймал.

324. Еще одно «решето» для простых чисел

Около ста лет назад одно из новых «решет» придумал индийский студент-математик С. П. Сундарам:

4	7	10	13	16	19	...
7	12	17	22	27	32	...
10	17	24	31	38	45	...
13	22	31	40	49	58	...
16	27	38	49	60	71	...
...	...	...	...	...	...	...

Это «решето» представляет собой таблицу, состоящую из бесконечного количества бесконечных арифметических прогрессий, причем *каждый* член первой прогрессии

$$4, 7, 10, 13, 16, 19, \ldots$$

начинает новую прогрессию. Разностями прогрессий будут все нечетные числа, начиная с 3:

$$d_1 = 3, d_2 = 5, d_3 = 7, d_4 = 9 \text{ и т.д.}$$

Если какое-либо число N встречается в этой таблице, то 2N + 1 — непременно число составное. Если же числа N в этой таблице нет, то 2N + 1 — число простое.

Примеры. 1) В таблице нет числа $N = 3$, следовательно, $2N + 1 = 7$ — число простое.

2) В таблице нет числа $N = 5$, следовательно, $2N + 1 = 11$ — число простое.

3) Числа $N = 6$ также нет в таблице, следовательно, $2N + 1 = 13$ — число простое.

4) Число $N = 7$ есть в таблице, следовательно, $2N + 1 = 15$ — число составное и т.д.

Заменяя N в формуле $2N + 1$ по порядку всеми числами, которых нет в таблице (которые как бы просеяны сквозь данное «решето»), можно получить все простые числа, кроме числа 2.

Как доказать, что $2N + 1$ — число *составное* для чисел, «задержавшихся в решете», и *простое* для «просеявшихся чисел»?

325. Полсотни первых простых чисел

2	3	5	7	11	13	17	19	23	29
31	37	41	43	47	53	59	61	67	71
73	79	83	89	97	101	103	107	109	113
127	131	137	139	149	151	157	163	167	173
179	181	191	193	197	199	211	223	227	229

326. Еще один способ получения простых чисел

Возьмем 1 и любое количество n первых простых чисел. Все эти числа произвольным образом распределим на две группы.

Перемножим числа каждой группы; образуется два произведения. Если сумма или разность этих произведений даст число N, меньшее, чем квадрат $(n + 1)$-го простого числа, то N — простое число.

Возьмем, например, 1 и четыре первых простых числа, то есть 1, 2, 3, 5 и 7. Пятое простое число 11. Заметим, что $11^2 = 121$. Значит, указанным способом мы сможем образовать простые числа, меньшие, чем 121.

Распределим взятые числа на две группы: 2, 3, 5, 7 и 1. Образуем число: $2 \times 3 \times 5 \times 7 - 1 = 209$.

Так как получившееся число 209 больше 121, то поручиться за то, что оно простое, мы не можем. Действительно, в таблице простых чисел (см. задачу 325) его нет.

Распределим взятые числа по-иному: 1, 3, 5, 7 и 2. Образуем два числа:

$$N_1 = 1 \times 3 \times 5 \times 7 - 2 = 103, \; N_2 = 1 \times 3 \times 5 \times 7 + 2 = 107.$$

Каждое из них меньше, чем 121, следовательно, оба должны быть простыми. В самом деле, если бы они были составными, то распадались бы на простые сомножители (см. задачу 323), но из способа образования этих чисел следует, что ни одно из них не делится на 2, 3, 5 или 7. Не могут числа N_1 и N_2 делиться и на следующее, старшее простое число, то есть на 11.

В самом деле, допустим, что N_1 (или N_2) делится на 11. Так как каждое из них меньше 121, то частное будет меньше 11 и, следовательно, не может содержать иных простых множителей, кроме 2, 3, 5 или 7. Но в таком случае N_1 (или N_2) делилось бы на какой-то из этих множителей, что противоречит способу образования числа N_1 (или N_2).

Если к первой группе отнесем числа 1, 5 и 7, а ко второй 2 и 3, то сможем образовать еще два простых числа:

$$1 \times 5 \times 7 - 2 \times 3 = 29 \text{ и } 1 \times 5 \times 7 + 2 \times 3 = 41.$$

Еще несколько возможных комбинаций:

$$1 \times 3 \times 7 - 2 \times 5 = 11, \quad 1 \times 3 \times 7 + 2 \times 5 = 31,$$
$$1 \times 2 \times 3 \times 5 - 7 = 23, \quad 1 \times 2 \times 3 \times 5 + 7 = 37 \text{ и т.д.}$$

Очевидно также, что можно повысить степень любого сомножителя первой или второй группы и сумма или разность произведений будут по-прежнему давать простое число, если только они останутся меньшими, чем квадрат (n – 1)-го простого числа.

Действительно,

$$1 \times 3 \times 5 \times 7 - 2^3 = 97, \quad 1 \times 3 \times 5 \times 7 + 2^3 = 113,$$
$$1 \times 5 \times 7 - 2 \times 3^2 = 17, \quad 1 \times 5 \times 7 + 2 \times 3^2 = 53,$$
$$1 \times 3 \times 5^2 - 2^2 \times 7 = 47, \quad 1 \times 3 \times 5^2 + 2^2 \times 7 = 103 \text{ и т.д.}$$

Составляя подобного рода комбинации всего лишь из трех чисел: 1, 2 и 3, — можно образовать все простые числа меньше 25. Вы без больших затруднений сможете обосновать этот способ получения простых чисел.

327. Сколько простых чисел?

Таблица простых чисел не имеет последнего числа. Число простых чисел бесконечно. Это доказал еще Евклид. Но распределяются простые числа в натуральном ряду очень неравномерно. Первый десяток натуральных чисел содержит четыре простых, то есть 40%. Первая сотня натуральных чисел содержит двадцать пять простых, то есть 25%. Миллион первых натуральных чисел содержит уже только 8% простых чисел и т. д.

Как при помощи расчета определить, хотя бы приближенно, сколько же простых чисел содержится в ряду натуральных чисел от 1 до любого числа N?

Этот вопрос оказался настолько трудным, что точной формулы нет до сих пор. Но найдена приближенная формула, позволяющая тем точнее находить число n простых чисел, приходящихся на N первых чисел натурального ряда («плотность» распределения простых чисел), чем больше N:

$$n \approx \frac{0{,}43429...}{\lg N} \times N^{**}).$$

Б. Числа Фибоначчи

328. Публичное испытание

В начале XIII века в итальянском городе Пиза жил большой знаток всевозможных соотношений между числами и весьма искусный вычислитель Леонардо (с добавлением к его имени Пизанский). Его звали еще Фибоначчи, что значит сын Боначчи. В 1202 году он издал «Книгу об абаке», содержащую в себе всю совокупность знаний того времени по арифметике и алгебре. Это была одна из первых книг в Европе, учившая использовать десятичную систему счисления.

Книга Леонардо Пизанского получила широкое распространение и более двух веков была наиболее авторитетным источником знаний в области чисел.

По обычаям того времени Фибоначчи участвовал в математических турнирах (публичное состязание в наилучшем и наиболее быстром решении трудных задач; нечто вроде наших математических олимпиад).

Леонардово искусство в решении числовых задач изумляло всех.

Высокая репутация Фибоначчи привлекла в 1225 году в Пизу государя Римской империи Фридриха II, который приехал в сопровождении группы математиков, желавших публично испытать Леонардо. Одна из задач, предложенных на турнире, имела следующее содержание:

Найти полный квадрат, остающийся полным квадратом как после увеличения его, так и после уменьшения на 5. Напомню, что полным квадратом называется число, из которого точно извлекается квадратный корень.

Фибоначчи после некоторых размышлений нашел такое число. Оно оказалось дробным:

$$\frac{1681}{144}, \text{ или } \left(\frac{41}{12}\right)^2.$$

Действительно:

$$\frac{1681}{144}-5=\frac{961}{144}, \ \frac{1681}{144}+5=\frac{2401}{144},$$

иначе

$$\left(\frac{41}{12}\right)^2-5=\left(\frac{31}{12}\right)^2$$

и

$$\left(\frac{41}{12}\right)^2+5=\left(\frac{49}{12}\right)^2.$$

Какими соображениями руководствовался Фибоначчи во время турнира, этого мы никогда не узнаем, но задачу он решил блестяще.

* * *

Ряд Фибоначчи известен не только математикам, но и природоведам.

Если листья на ветке сидят одиноко, то они всегда располагаются кругом стебля, но не по окружности, а по винтовой линии, то есть каждый последующий лист повыше и в сторону от предыдущего. При этом для каждого вида растений характерен свой угол расхождения двух соседних листьев, который, как утверждают ботаники, выдерживается более или менее точно во всех частях стебля. Этот угол обычно выражают дробью, показывающей, какую часть окружности он составляет. Так, у липы и вяза угол расхождения листьев составляет $\frac{1}{2}$ окружности; у бука — $\frac{1}{3}$, у дуба и вишни — $\frac{2}{5}$, у тополя и груши — $\frac{3}{8}$, у ивы — $\frac{5}{13}$ и т.д. Тот же угол у данного вида растений сохраняется также и в расположении веток, почек, чешуек внутри почек, цветов.

Наиболее распространены среди растений следующие углы расхождения (в частях окружности):

$$\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{5},\ \frac{3}{8},\ \frac{5}{13},\ \frac{8}{21},\ \ldots$$

Ряд числителей и ряд знаменателей здесь — числа Фибоначчи, причем каждая из дробей (начиная с третьей) получается из двух предыдущих путем сложения их числителей и знаменателей:

$$\frac{2}{5}=\frac{1+1}{2+3}, \frac{3}{8}=\frac{1+2}{3+5} \text{ и т.д.}$$

329. Парадокс

С числами Фибоначчи косвенно связан занятный геометрический парадокс.

Совершенно очевидно, что если какую-либо плоскую фигуру разрезать на несколько частей, затем, прикладывая полученные части друг к другу (но не накладывая одну на другую), образовать новую фигуру, то по форме новая фигура может отличаться от первоначальной, но *площадь* ее должна остаться прежней; ни одной квадратной единицы не может ни прибавиться, ни убавиться. Это очевидное утверждение считается в геометрии одним из тех первичных основных положений, на которых строится вся теория измерения площадей.

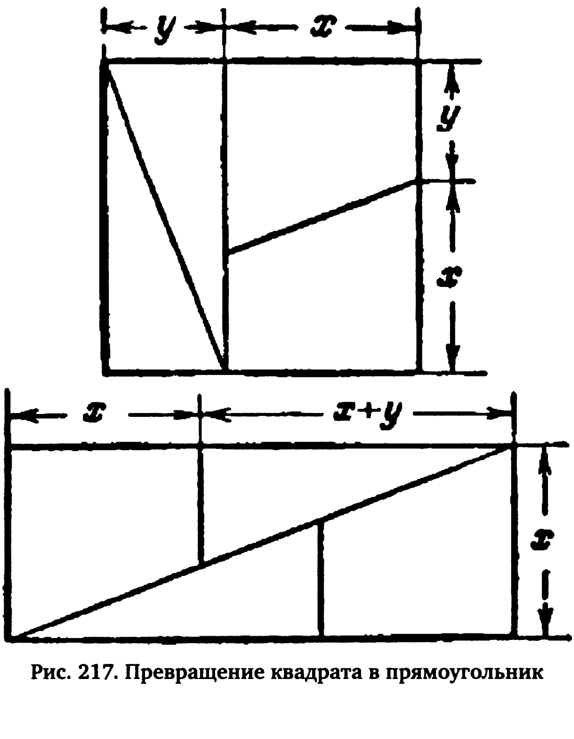


Рис. 217. Превращение квадрата в прямоугольник

На рис. 217 показано превращение квадрата в прямоугольник.

Квадрат разрезан на два равных треугольника и на две равные трапеции, длины сторон которых пока обозначены буквами x и y. Из этих частей составлен прямоугольник. Если такое превращение квадрата в прямоугольник действительно возможно, то на какие же части x и y нужно при этом делить сторону квадрата?

Один мой юный друг решил установить это практически и натолкнулся при этом на поразительное явление.

— Дай, думаю, — пишет он в письме, — я сам проделаю это превращение практически. Копировать рисунок с книги мне не хотелось. Я решил сам разметить свой квадрат, пользуясь указаниями рис. 217.

Нарисовал я на бумаге в клетку квадрат в 64 клетки и задумался над вопросом: на какие части x и y разделить сторону квадрата? Сначала я подумал, что это безразлично, и положил $x = 6$, $y = 2$. Разметил квадрат, разрезал его на два равных треугольника и две равные трапеции, начал составлять прямоугольник, как указано на рис. 217, и... ничего не вышло! Сплошного прямоугольника не получилось. Не получался сплошной прямоугольник и при других значениях x и y, например при $x = 4\,{}^1/_2, y = 3\,{}^1/_2$.

Только при $x = 5$, $y = 3$ я смог составить прямоугольник из образовавшихся частей квадрата, но тут же был ошеломлен новой неприятностью: площадь прямоугольника оказалась равной 65 клеткам, то есть на одну клетку большей, чем площадь первоначально взятого квадрата (рис. 218).

В самом деле, длина прямоугольника (см. рис. 217) должна содержать $x + x + y = 2x + y = 2 \times 5 + 3 = 13$ единиц; у меня и получилось ровно 13 единиц; ширина прямоугольника x, и у меня получилась ширина прямоугольника 5 единиц (рис. 218). Отсюда его площадь содержит ровно $13 \times 5 = 65$ клеток! Проделайте сами!

Но это еще не все. По той же выкройке (см. рис. 217) я делил на части и другой квадрат со стороной в 13 единиц. Если я брал $x = 8$ и $y = 5$, то из частей квадрата складывался прямоугольник, но...в этот раз с площадью, *меньшей* площади квадрата, причем тоже ровно на одну клетку.

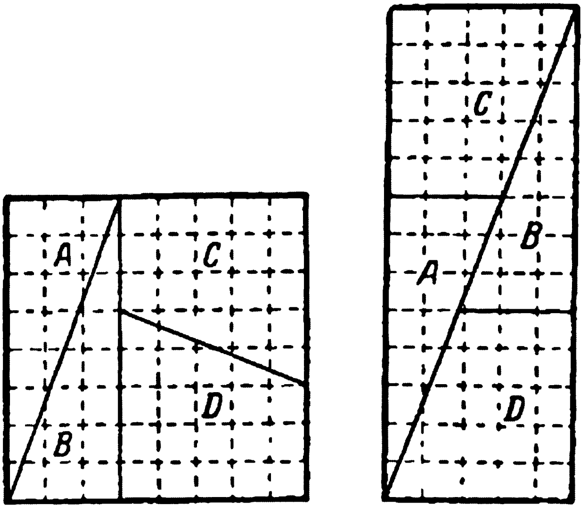


Рис. 218. Части те же, а количество клеток увеличилось! Почему?

Судите сами: площадь квадрата содержит $13^2 = 169$ клеток, а площадь прямоугольника содержит $(2x + y) \times x = (2 \times 8 + 5) \times 8 = 168$ клеток!

Еще два примера.

1) Беру квадрат в $21 \times 21 = 441$ клетку. Делю сторону на части $x = 13$, $y = 8$. Разрезаю. Складываю. Прямоугольник получается. Подсчитываю площадь:

$$(2x + y)\,x = (2 \times 13 + 8) \times 13 = 442 \text{ клетки!}$$

Опять лишняя клетка.

2) Беру квадрат в $34 \times 34 = 1156$ клеток. Делю сторону на части $x = 21$, $y = 13$. Разрезаю. Складываю. Прямоугольник получается. Подсчитываю площадь:

$$(2x + y)\,x = (2 \times 21 + 13) \times 21 = 1155 \text{ клеток.}$$

Не хватает одной клетки!

Почему так получается?

Что бы вы ответили моему юному другу? Обдумайте хорошенько весь этот парадокс, прежде чем прочтете решение. Какую роль в нем играют числа Фибоначчи?

330. Свойства чисел ряда Фибоначчи

Обнаружено много интересных соотношений между числами ряда Фибоначчи:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21,\ldots$$

1) Принцип образования членов этого ряда приводит к следующему соотношению между любыми его тремя рядом стоящими членами S_{n-2}, S_{n-1} и S_n:

$$S_n = S_{n-1} + S_{n-2}.$$

Эта формула дает возможность по первым двум членам ряда установить его третий член, по второму и третьему — четвертый, по третьему и четвертому — пятый и т. д.

2) Интересно было бы уметь сразу получить любой член ряда S_n, зная лишь номер n его места. Оказывается, это вполне возможно, но здесь мы столкнемся с одной из удивительных неожиданностей, которые нередки в математике.

Любой член ряда Фибоначчи — число целое, номер места — тоже число целое. Естественно было бы ожидать, что любой член ряда S_n получается в зависимости от номера n занимаемого им места при помощи действий только над целыми числами (например, как в прогрессиях). Но это не так. Не только целые числа, но даже все целые и дробные (рациональные) бессильны образовать интересующую нас формулу.

Из затруднительного положения помогают выйти два иррациональных числа:

$$a_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ и } a_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Вспомните, как эти же два числа обращали в нуль разность R между площадями прямоугольника и квадрата (см. решение к задаче 328). Поистине неожиданная встреча!

Так вот, если n — номер места, то любой член S_n ряда Фибоначчи вы можете получить по формуле

$$S_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}} = \frac{a_1^n - a_2^n}{\sqrt{5}}.$$

При $n = 1$

$$S_1 = \frac{\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}}{\sqrt{5}} = 1;$$

при $n = 2$

$$S_2 = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2}{\sqrt{5}} = 1.$$

Так как для двух соседних членов ряда эта формула подтверждается, а всякий последующий член ряда Фибоначчи получается как сумма двух предыдущих, то далее нет необходимости проверять справедливость формулы для отдельных случаев; можно сразу убедиться в ее справедливости для любого номера n. Напишем ее выражение для двух соседних n:

$$S_{n-2} = \frac{a_1^{n-2} - a_2^{n-2}}{\sqrt{5}} \text{ и } S_{n-1} = \frac{a_1^{n-1} - a_2^{n-1}}{\sqrt{5}}.$$

Формула (*) будет справедлива для любого n, если сумма этих двух выражений даст соответствующее выражение для S_n:

$$S_{n-2} + S_{n-1} = \frac{a_1^{n-2} - a_2^{n-2}}{\sqrt{5}} + \frac{a_1^{n-1} - a_2^{n-1}}{\sqrt{5}} =$$

$$= \frac{a_1^{n-2}(a_1+1) - a_2^{n-2}(a_2+1)}{\sqrt{5}}.$$

Зная, что представляют собой a_1 и a_2, вы легко можете проверить расчетом, что

$$a_1 + 1 = a_1^2 \text{ и } a_2 + 1 = a_2^2.$$

Возвращаясь к сумме $S_{n-2} + S_{n-1}$ получим:

$$S_{n-2} + S_{n-1} = \frac{a_1^{n-2} - a_2^{n-2}a_2^2}{\sqrt{5}} = \frac{a_1^{n-1} - a_2^n}{\sqrt{5}} = S_n,$$

что и требовалось доказать.

3) Зная, как любой член S_n ряда Фибоначчи определяется по номеру n занимаемого им места:

$$S_n = \frac{a_1^n - a_2^n}{\sqrt{5}}, \text{ где } a_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ и } a_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2},$$

легко доказать, что любая пара соседних чисел ряда Фибоначчи S_n и S_{n+1} удовлетворяет одному из уравнений $x^2 - xy - y^2 = \pm 1$, причем, если $y = S_n$, то $x = S_{n+1}$. Заменяя неизвестные уравнения соответствующими выражениями

$$y = \frac{a_1^n - a_2^n}{\sqrt{5}}, \; x = \frac{a_1^{n+1} - a_2^{n+1}}{\sqrt{5}},$$

будем иметь:

$$\frac{(a_1^{n+1} - a_2^{n+1})^3}{5} - \frac{(a_1^{n+1} - a_2^{n+1})(a_1^n - a_2^n)}{5} - \frac{(a_1^n - a_2^n)^3}{5} = \pm 1.$$

$$a_1^{2n+2} - 2a_1^{n+1}a_1^{n+1} + a_2^{2n+2} - a_1^{2n+1} + a_1^n a_2^{n+1} + a_1^{n+1}a_2^n -$$
$$- a_2^{2n+1} - a_1^{2n} + 2a_1^n a_2^n - a_2^{2n} = \pm 5.$$

Группируем члены с одинаковыми основаниями

$$a_1^{2n}(a_1^2 - a_1 - 1) + a_2^{2n}(a_2^2 - a_2 - 1) +$$
$$+ a_1^n a_2^n(-2a_1 a_2 + a_2 + a_1 + 2) = \pm 5.$$

Подставляя соответствующие значения a_1 и a_2 в выражения, стоящие в скобках, получим: $5a_1^n a_2^n = \pm 5$ или $5\,(a_1 a_2)^n = \pm 5$. Но

$$a_1 a_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \times \frac{1-\sqrt{5}}{2} = -1.$$

Следовательно, при n четном $5\,(-1)^n = 5$, а при n нечетном $5\,(-1)^n = -5$.

4) Очень забавный вид у формулы для суммы n членов ряда Фибоначчи:

$$S_1 + S_2 + \ldots S_n = S_{n+2} - 1.$$

Сумма n первых членов ряда Фибоначчи на 1 меньше $(n + 2)$-го члена того же ряда.

Доказательство. По закону образования членов ряда имеем:

$$S_{n+2} = S_{n+1} + S_n,$$
$$S_{n+1} = S_n + S_{n-1},$$
$$S_n = S_{n-1} + S_{n-2},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$S_4 = S_3 + S_2,$$
$$S_3 = S_2 + S_1.$$

Складывая эти равенства и уничтожая подобные члены получим:

$$S_{n+2} = (S_n + S_{n-1} + \dots + S_1) + S_2;$$

следовательно,

$$S_1 + S_2 + \dots + S_n = S_{n+2} - S_2,$$
$$S_1 + S_3 + \dots + S_n = S_{n+2} - 1,$$
$$S_1 + S_2 + \dots + S_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}}{\sqrt{5}} - 1.$$

5) Сумма квадратов чисел ряда Фибоначчи выражается через произведение двух соседних членов того же ряда:

$$S_1^2 + S_2^2 + \dots + S_n^2 = S_n \times S_{n+1}. \qquad (**)$$

Например,

$$1^2 + 1^2 = 1 \times 2.$$
$$1^2 + 1^2 + 2^2 = 2 \times 3,$$
$$1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 = 3 \times 5 \text{ и т.д.}$$

Для доказательства применим метод полной математической индукции. Пусть формула (**) верна для некоторого числа членов k:

$$S_1^3 + S_2^3 + \dots + S_k^3 = S_k \times S_{k+1}.$$

Прибавим к обеим частям равенства по формула на с. 359:

$$S_1^2 + S_2^2 + \dots + S_k^2 + S_{k+1}^2 = S_k \times S_{k+1} + S_{k+1}^2 =$$
$$= S_{k+1}(S_k + S_{k+1}) = S_{k+1} \times S_{k+2}.$$

Формула, справедливая, по предположению, для k слагаемых, осталась справедливой и для $k + 1$ слагаемых.

Как показала непосредственная проверка, формула (**) справедлива для $k = 2$. Этого достаточно, чтобы теперь утверждать, что она будет справедливой и для любого целого числа n.

* * *

Используя формулу (*) или метод полной математической индукции, докажите самостоятельно еще следующие соотношения.

6) Квадрат каждого члена ряда Фибоначчи, уменьшенный на произведение предшествующего и последующего членов, дает попеременно то + 1, то –1.

$$\text{Например,}\quad \begin{array}{l} 2^2 - 1 \times 3 = +1, \\ 3^2 - 2 \times 5 = -1, \\ 5^2 - 3 \times 8 = +1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

вообще

$$S_n^2 - S_{n-1}S_{n+1} - (-1)^{n+1}.$$

7) $S_1 + S_3 + \ldots + S_{2n-1} = S_{2n}$.

8) $S_2 + S_4 + \ldots + S_{2n} = S_{2n+1} - 1$.

9) В ряду Фибоначчи каждое третье число — четное, каждое четвертое делится на 3, каждое пятое — на 5, каждое пятнадцатое — на 10.

10) Невозможно построить треугольник, сторонами которого являются числа ряда Фибоначчи.

11) Если взять любые четыре последовательных числа ряда Фибоначчи и рассматривать произведение крайних членов и удвоенное произведение средних как длины катетов прямоугольного треугольника, то длиной его гипотенузы будет один из членов этого ряда:

$$(a_n \times a_{n+3})^2 + (2a_{n+1} \times a_{n+2})^2 = a_{2n+3}^2 *).$$

В. Фигурные числа

331. Свойства фигурных чисел

1) Еще задолго до нашей эры ученые, комбинируя натуральные числа, составляли из них затейливые ряды, придавая элементам этих рядов то или иное геометрическое истолкование.

Так, например, в V–IV веках до н. э. возникли представления о рядах так называемых *фигурных чисел*.

Рассмотрим сначала такой ряд, в котором разность между каждым последующим и предыдущим членами равна одному и тому же натуральному числу (арифметическая прогрессия), например

1, 2, 3, 4, 5,… (разность $d = 1$),
1, 3, 5, 7, 9,… (разность $d = 2$),
1, 4, 7, 10, 13,… (разность $d = 3$);

или в общем виде:

$$1,\ 1 + d,\ 1 + 2d,\ 1 + 3d,\ 1 + 4d, \ldots$$

У каждого элемента ряда есть свое место. Чтобы получить n-й элемент ряда (назовем его a_n), нужно к первому элементу ряда прибавить произведение разности ряда на число, которое на 1 меньше номера места, занимаемого этим элементом a_n:

$$a_n = 1 + d\,(n - 1).$$

Элементы каждого из таких рядов называются *линейными фигурными* числами или иначе *фигурными числами первого порядка*.

2) Из рядов с линейными фигурными числами образуем последовательные суммы этих чисел: первую «сумму» из одного первого элемента ряда линейных фигурных чисел, вторую сумму — складывая первые два элемента того же ряда, третью сумму — складывая первые три элемента и т. д., n-ю сумму — складывая первые n элементов.

Так, первый ряд линейных фигурных чисел

$$1, 2, 3, 4, 5, \ldots$$

производит следующий новый ряд, ряд сумм:

$$S_1 = 1, S_2 = 1 + 2 = 3, S_3 = 1 + 2 + 3 = 6, S_4 = 1 + 2 + 3 + 4 = 10,$$
$$S_5 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15,\ldots,$$

или 1, 3, 6, 10, 15,...

Назвали эти числа *треугольными*.

Второй ряд линейных фигурных чисел

1, 3, 5, 7, 9, ...

производит такой ряд сумм:

1, 4, 9, 16, 25,...

Эти числа назвали *квадратными*.

Из третьего ряда линейных фигурных чисел

1, 4, 7, 10, 13,...

можно произвести ряд *пятиугольных* чисел

1, 5, 12, 22, 35,...

Аналогично можно образовать *шестиугольные*, *семиугольные* и т. п. числа.

Все эти многоугольные числа называются *плоскими* фигурными числами, или *фигурными числами второго порядка*.

3) Геометрические «имена», которые получили эти числа, объясняются возможностью дать им наглядное истолкование. Построим равносторонний треугольник, квадрат, правильные пятиугольник, шестиугольник и т. д. со сторонами, равными 1. Затем, отправляясь в каждой фигуре от одной из вершин, удлиним все стороны в 2, 3, 4,... раз, то есть, как говорят математики, построим многоугольники перспективно-подобные данным (рис. 219).

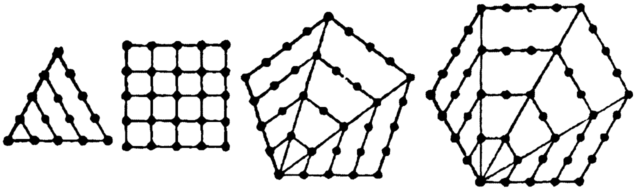


Рис. 219. Фигурные числа

Во всех вершинах получившихся фигур и на их сторонах на расстояниях, равных 1, поместим кружочки. Подсчет кружочков, расположенных в каждом треугольнике, приводит к ряду треугольных чисел

$$1, 3, 6, 10, 15,\ldots$$

Подсчет кружочков, расположенных в каждом квадрате, дает последовательность квадратных чисел

$$1, 4, 9, 16, 25,\ldots$$

Аналогичные подсчеты кружочков в каждом пятиугольнике, шестиугольнике и т. д. приводят соответственно к последовательностям чисел пятиугольных, шестиугольных и т. д.

4) Дадим сводку всех плоских фигурных чисел:

d	Фигура	Числа						Общий член S_n
		S_1	S_2	S_3	S_4	S_5		
1	Треугольник	1	3	6	10	15	…	$\frac{n\,(n+1)}{S_n}$
2	Квадрат	1	4	9	16	25	…	
3	Пятиугольник	1	5	12	22	35	…	$\frac{n(3_n^{n^2}-1)}{2}$
4	Шестиугольник	1	6	15	28	45	…	$n\,(2n-1)$
.	…………………	.	.	.	.	.	…	…………
d		1	$2+d$	$3+3d$	$4+6d$	$5+10d$		$\frac{n\,[dn-(d-2)]}{2}$

Общий член S_n каждого ряда плоских фигурных чисел, как это следует из их определения, представляет собой сумму n элементов соответствующего ряда линейных фигурных чисел:

$$1,\ 1+d,\ 1+2d,\ 1+3d,\ldots,\ 1+d\,(n-1),$$

где $d = 1, 2, 3, 4,\ldots$

Другими словами, S_n — это сумма n членов арифметической прогрессии, у которой $a_1 = 1$, $a_n = 1 + d\,(n-1)$ и разность $d = 1, 2, 3,\ldots$

Вспомните формулу для суммы членов арифметической прогрессии:

$$S = \frac{(a_1 + a_n)\, n}{2}.$$

По этой формуле имеем:

$$S_n = \frac{[1 + 1 + d\,(n - 1)]\, n}{2} = \frac{n\,[dn - (d - 2)]}{2}.$$

Отсюда при $d = 1$ получаем формулу для S_n первой строки таблицы, при $d = 2$ получаем формулу для S_n второй строки таблицы и т. д.

5) Между натуральными числами и плоскими фигурными числами и между самими плоскими фигурными числами существует много любопытных зависимостей.

Пьер Ферма́ (1601–1665), юрист и общественный деятель французского города Тулуза, занимавшийся математикой в часы досуга (что, однако, не помешало ему сделать крупнейшие открытия в теории чисел), обнаружил, например, что *а) всякое натуральное число есть треугольное ила сумма двух или трех треугольных чисел;*

б) всякое натуральное число есть или квадрат, или сумма двух, трех или четырех квадратных чисел; всякое натуральное число есть или пятиугольное, или сумма двух, трех, четырех или пяти пятиугольных чисел;

в) вообще всякое натуральное число может быть представлено в виде суммы не более чем k k-угольных чисел.

Для отдельных частных случаев эту теорему доказал петербургский математик Эйлер, а общее доказательство дал в 1815 году французский математик Коши.

Поупражняйтесь: возьмите какое-нибудь натуральное число и разложите его на сумму треугольных квадратных или пятиугольных чисел. Можно соревноваться, кто быстрее сделает.

6) Математик Диофант (Греция, III век до н. э.) нашел простую связь между треугольными числами T и квадратными K:

$$8T + 1 = K.$$

Можно очень наглядно представить себе эту формулу Диофанта хотя бы на примере треугольного числа 21.

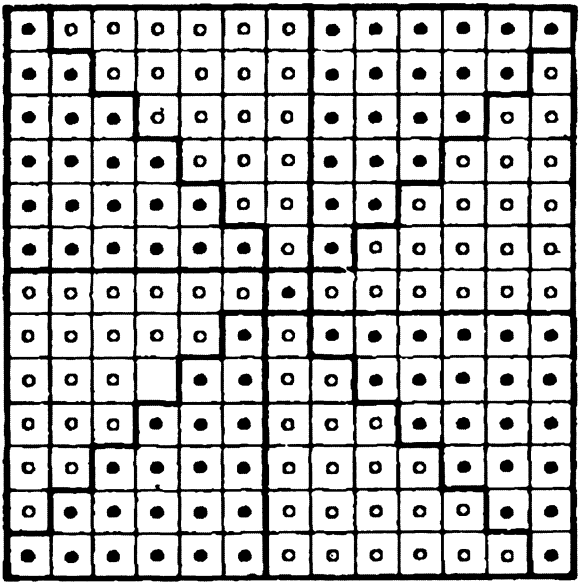


Рис. 220. Связь между треугольными и квадратными числами

На рис. 220 изображено 169 пятнышек, размещенных в квадрате. Они образуют квадратное число K. Одно пятнышко занимает центр квадрата, а остальные 168 сгруппированы в восемь треугольных чисел T в форме восьми «прямоугольных треугольников» с ломаными гипотенузами.

Получается: $8T + 1 = K$.

7) В качестве самостоятельного упражнения докажите алгебраически:

а) справедливость формулы Диофанта;

б) что никакое треугольное число не может оканчиваться цифрами 2, 4, 7 и 9;

в) что всякое шестиугольное число есть треугольное с нечетным номером.

8) Для суммы степеней натуральных чисел, то есть одного из видов линейных фигурных чисел, известна такая формула:

$$(1 + 2 + 3 + \ldots + n)^2 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3$$

(см. 318, V). Якоби нашел другую интересную зависимость между теми же числами:

$$2\,(1 + 2 + 3 + \ldots + n)^4 = (1^5 + 2^3 + \ldots + n^5) + \\ + (1^7 + 2^7 + \ldots + n^7).$$

Аналогичная зависимость обнаружена между суммами степеней треугольных чисел, то есть одного из видов плоских фигурных чисел:

$$3\left[1+3+6+10+\cdots+\frac{n(n+1)}{2}\right]^3 = \\ =\left[1^3+3^3+\cdots+\frac{[n(n+1)]^1}{2^3}\right]+ \\ +2\left[[1^4+3^4+\cdots+\frac{[n(n+1)]^4}{2^4}\right].$$

Например,

$$3\,(1 + 3 + 6)^3 = 1^3 + 3^3 + 6^3 + 2\,(1^4 + 3^4 + 6^4) = 3000,$$
$$3\,(1 + 3 + 6 + 10)^3 = 1^3 + 3^3 + 6^3 + 10^3 + 2 \times \\ \times (1^4 + 3^4 + 6^4 + 10^4) = 24\,000.$$

9) Составляя последовательные суммы из плоских фигурных чисел $V_1 = S_1$, $V_2 = S_1 + S_2$, $V_3 = S_1 + S_2 + S_3$, $V_4 = S_1 + S_2 + S_3 + S_4$ и т.д., получим *пространственные* фигурные числа или *фигурные числа третьего порядка*: V_1, V_2, V_3,...

Так, ряд треугольных чисел

1, 3, 6, 10, 15,...

производит следующий ряд фигурных чисел третьего порядка:

1, 4, 10, 20, 35,...

Эти числа называют еще пирамидальными, так как для их геометрического представления выкладываются пирамиды из шаров одинакового диаметра.

Подложим под шар три шара. Получим «пирамиду» из четырех шаров как изображение числа 4. Подложим снизу еще шесть шаров, получим пирамиду из десяти шаров как изображение числа 10 (рис. 221) и т.д.

Рис. 221. Изображение числа 4 и числа 10

10) Дадим сводку всех фигурных чисел третьего порядка:

d	Числа						Общий член V_n
	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5		
1	1	4	10	20	35	...	$\frac{1}{6}n\ (n + 1)\ (n + 2)$
2	1	5	14	30	55	...	$\frac{1}{6}6n\ (n + 1)\ (2n + 1)$
3	1	6	18	40	75	...	$\frac{1}{2}n^2\ (n + 1)$
4	1	7	22	50	95	...	$\frac{1}{6}n\ (n + 1)\ (4n - 1)$
.	.	.	..	..	..	...	....
d	1	$3 + d$	$6 + 4d$	$10 + 10d$	$15 + 20d$		$\frac{1}{6}n\ (n + 1)\ [dn - (d - 3)]$

Вывести формулу общего члена V_n для пространственных фигурных чисел труднее, чем для плоских. Потребуются некоторые знания из теории соединений. Те из читателей, кто теории соединений еще не изучал, могут пропустить дальнейшее изложение вывода формул для V_n.

Введем обозначения:

$V_2 - V_1 = b_1$, причем $b_1 = 3 + d - 1 = 2 + d$;
$V_3 - V_2 = b_2$, причем $b_2 = 6 + 4d - 3 - d = 3 + 3d$;
$V_4 - V_3 = b_3$, причем $b_3 = 10 + 10d - 6 - 4d = 4 + 6d$;
$V_5 - V_4 = b_4$, причем $b_4 = 15 + 20d - 10 - 10d = 5 + 10d$;
$V_6 - V_5 = b_5$
....

$$V_2 = V_1 + b_1,$$
$$V_3 = V_2 + b_2,$$
$$V_4 = V_3 + b_3,$$
$$V_5 = V_4 + b_4,$$
$$V_6 = V_5 + b_5$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Далее:

$$b_2 - b_1 = r_1, \text{ причем } r_1 = 3 + 3d - 2 - d = 1 + 2d;$$
$$b_3 - b_2 = r_2, \text{ причем } r_2 = 4 + 6d - 3 - 3d = 1 + 3d;$$
$$b_4 - b_3 = r_3, \text{ причем } r_3 = 5 + 10d - 4 - 6d = 1 + 4d;$$
$$b_5 - b_4 = r_4$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$b_2 = b_1 + r_1,$$
$$b_3 = b_2 + r_2,$$
$$b_4 = b_3 + r_3,$$
$$b_5 = b_4 + r_4$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Замечаем теперь, что

$$r_2 - r_1 = d,$$
$$r_3 - r_2 = d,$$
$$r_4 - r_3 = d \text{ и т.д.}$$

Откуда

$$r_2 = r_1 + d,$$
$$r_3 = r_2 + d = r_1 + 2d,$$
$$r_4 = r_3 + d = r_1 + 3d \text{ и т.д.}$$

Эти соотношения дают возможность выразить числа

$$V_1, V_2, V_3, \ldots, V_n \text{ через } V_1, b_{1,} r_1 \text{ и } d;$$
$$V_2 = V_1 + b_{1,}$$
$$V_3 = V_2 + b_2 = V_1 + b_1 + b_1 + r_1 = V_1 + 2b_1 + r_1.$$

Замечаем, что коэффициенты при b_1 и r_1 могут быть выражены формулами сочетаний из двух элементов:

$$2 = C_2^1,\ 1 = C_2^2.$$

Тогда

$$V_3 = V_1 + C_2^1 b_1 + C_2^2 r_1.$$

Далее:

$$V_4 = V_3 + b_3 = V_1 + 2b_1 + r_1 + b_2 + r_2 =$$
$$= V_1 + 2b_1 + r_1 + b_1 + r_1 + r_1 + d = V_1 + 3b_1 + 3r_1 + d.$$

Так как $3 = C_3^1 + C_3^2$ и $1 = C_3^2$, то

$$V_4 = V_1 + C_3^1 b_1 + C_3^2 r_1 + C_3^3 d,$$
$$V_5 = V_4 + b_4 = V_1 + 3b_1 + 3r_1 + d + b_3 + r_3 = V_1 + 3b_1 + 3r_1 + d +$$
$$+ b_2 + r_2 + r_1 + 2d = V_1 + 3b_1 + 3r_1 + d + b_1 + r_1 + r_1 + d + r_1 +$$
$$+ 2d = V_1 + 4b_1 + 6r_1 + 4d.$$

Так как $4 = C_4^1 + C_4^3$, $6 = C_4^2$, то $V_5 = V_1 + C_4^1 b_1 + C_4^2 r_1 + C_4^3 d$.

Для V_6 получаем:

$$V_5 = V_1 + C_5^1 b_1 + C_5^2 r_1 + C_5^3 d.$$

Для V_n:

$$V_n = V_1 + C_{n-1}^1 b_1 + C_{n-1}^2 r_1 + C_{n-1}^3 d.$$

Подставляя сюда выражения для b_1 и r_1 и раскрывая формулы сочетаний, получим:

$$V_n = 1 + (n-1)(2+d) + \frac{(n-1)(n-2)}{2}(1+2d) +$$
$$+ \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \times 3} d.$$

После преобразований:

$$V_n = \frac{1}{6} n (n+1) [dn - (d-3)].$$

При $d = 1$ получим:

$$V_n = \frac{1}{6} n (n+1)(n+2).$$

При $d = 2$

$$V_n = \frac{1}{6} n (n+1)(2n+1) \text{ и т.д.}$$

(см. первую и вторую строки таблицы).

11) Тема для самостоятельных упражнений (только для тех, кто знает формулы и свойства «сочетаний»).

Таким же путем, как были получены фигурные числа третьего порядка, образуйте фигурные числа четвертого порядка и найдите формулу общего члена.

332. Пифагоровы числа

Иногда возникает необходимость построить такой прямоугольный треугольник, у которого оба катета и гипотенуза выражаются *целыми* числами. Целые числа, пригодные для этой цели, и называют *пифагоровыми*, так как они должны удовлетворять найденному Пифагором соотношению между катетами x, y и гипотенузой z:

$$x^2 + y^2 = z^2.$$

Назначая длины катетов x и y наугад, гипотенузу z можно вычислить по формуле $z = \sqrt{x^2 + y^2}$; однако трудно наугад так выбрать целые значения x и y, чтобы z тоже оказалось целым.

Например, при $x = 3$, $y = 4$ получаем $z = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$, хорошо известный «египетский» треугольник (3, 4, 5), но при $x = 2$, $y = 6$ гипотенуза $z = \sqrt{2^2 + 6^2} = \sqrt{40}$ не выражается целым числом.

Тем не менее пифагоровых чисел существует бесчисленное множество.

Любое комплексное число $a + bi$ с целыми a и b будет числом, производящим пифагоровы числа.

Напомню прежде, что буквой i обозначается $\sqrt{-1}$, причем $i^2 = -1$. С учетом этого соотношения комплексное число возводится в квадрат по формуле «квадрат суммы».

Например,

$$\text{а) } (3 + 2i)^2 = 9 + 12i - 4 = 5 + 12i,$$
$$\text{б) } (2 + 5i)^2 = 4 + 20i - 25 = -21 + 20i.$$

Квадрат всякого комплексного числа $a + bi$ также будет комплексным числом вида $x + yi$. Числа x, y и $a^2 + b^2$ всегда будут пифагоровыми числами.

Так для примера а) имеем:

$$x = 5, y = 12,$$
$$a^2 + b^2 = 3^2 + 2^2 = 13,$$

причем

$$5^2 + 12^2 = 13^2;$$

для примера б) имеем:

$$x = -21, y = 20,$$
$$a^2 + b^2 = 2^2 + 5^2 = 29,$$

причем

$$21^2 + 20^2 = 29^2.$$

Захотелось, положим, нам произвести тройку пифагоровых чисел из чисел 1 и 4. Составляем комплексное число $1 + 4i$ (или другое: $4 + i$). Возводим в квадрат:

$$(1 + 4i)^2 = -15 + 8i.$$

Теперь имеем:

$$15^2 + 8^2 = 17^2 \ (17 = 1^2 + 4^2).$$

Простой, легко запоминающийся способ!

Если эти вычисления произвести в буквенной форме, получатся хорошо известные формулы для подбора пифагоровых чисел x, y и z:

$$(a + bi)^2 = (a^2 - b^2) + 2abi.$$

Отсюда

$$x = a^2 - b^2, y = 2ab, z = a^2 + b^2,$$

где a и b — произвольные целые числа.

Любопытно заметить дополнительно, что куб любого комплексного числа аналогичным путем приводит к решению уравнения

$$x^2 + y^2 = z^3.$$

Пусть, например,

$$a + bi = 1 + 2i.$$

Возведем в куб:

$$(1 + 2i)^3 = 1 + 3 \times 2i + 3 \times 4i^2 + 8i^3 = 1 + 6i - 12 - 8i$$

(так как $i^3 = i^2 \times i = -1 \times i = -i$),

$$(1 + 2i)^3 = -11 - 2i.$$

Отсюда имеем:

$$x = 11, y = 2, z = 1^3 + 2^3 = 5.$$

Действительно,

$$11^2 + 2^2 = 5^3.$$

Еще пример:

$$(5 + 3i)^3 = 125 + 3 \times 25 \times 3i + 3 \times 5 \times 9i^2 + 27i^3 = -10 + 198i.$$

Имеем:

$$10^2 + 198^2 = 34^3.$$

Таким приемом вы легко найдете любое количество решений в целых числах уравнения

$$x^2 + y^2 = z^n$$

для любого целого n.

Найдите, например, какую-нибудь тройку чисел x, y и z, удовлетворяющих уравнению

$$x^2 + y^2 = z^4.$$

РЕШЕНИЯ
и
ОТВЕТЫ

Решения и ответы

К главе I

1. Нужно обратить внимание на дым, идущий из трубы паровоза. Если бы поезд стоял, то дым паровоза отклонялся бы в ту сторону, куда дует ветер. Если бы, наоборот, поезд двигался вперед при отсутствии ветра, то дым от паровоза отклонялся бы назад. Как показано на рис. 1, дым от идущего паровоза поднимается вверх, значит, поезд имеет скорость, равную скорости ветра, то есть 7 м в секунду или около 25 км в час.

2. Решение показано на рис. 222.

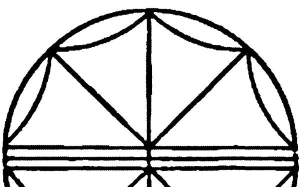


Рис. 222

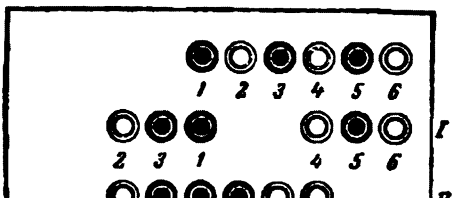


Рис. 223

3. Перенумеруем шашки слева направо, как показано на рис. 223. Если свободное место оставлено слева, то перенесем шашки № 2 и № 3 налево и поместим их в начале ряда так, чтобы шашка № 3 оказалась рядом с шашкой № 1 (см. перемещение *I* на рис. 223). На освободившееся место поместим шашки №5 и №6 (перемещение *II*). Перенесем теперь шашки №6 и №4 налево, к шашке №2 (перемещение *III*).

Проделайте решение этой задачи в обратном порядке. От последнего расположения шашек, тоже в три хода, вернитесь к первоначальному их расположению.

Теперь это нетрудно!

4. Схема решения:

Кучка	Начальное распределение	1-й ход	2-й ход	3-й ход
Первая	11	11−7=4	4	4+4=8
Вторая	7	7+7=14	14−6=8	8
Третья	6	6	6+6=12	12−4=8

5. 35 треугольников. А теперь самостоятельно сосчитайте, сколько всевозможных четырехугольников в фигуре, изображенной на рис. 4.

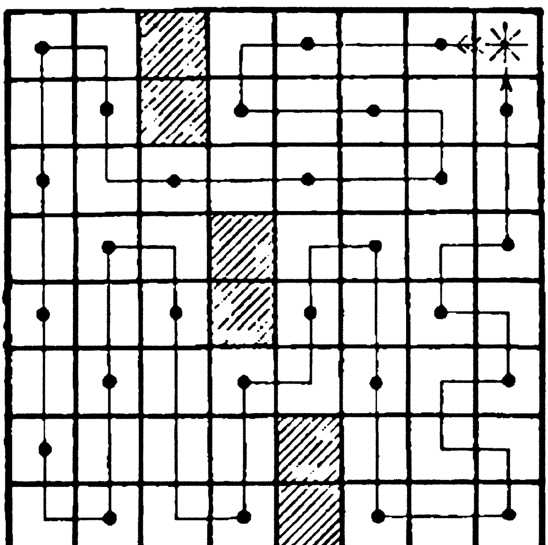


Рис. 224

6. Один из возможных путей показан стрелкой на рис. 224.

7. Дать четырем девочкам по яблоку, а пятой девочке — оставшееся яблоко вместе с корзиной.

8. Четыре кошки.

9. В начальном положении запачкан 1 см длины желтого карандаша. При движении синего карандаша вниз пачкается второй сантиметр его длины, а при последующем движении вверх — второй сантиметр синего карандаша пачкает второй сантиметр желтого.

Таким образом, каждая пара движений карандаша вниз — вверх пачкает 1 см длины желтого карандаша. Десять пар движений запачкают 10 см длины, а вместе с начальным сантиметром будет запачкано 11 см длины желтого (а также и синего) карандаша.

* * *

Взглянув на свои сапоги, Леонид Михайлович заметил, что они запачканы грязью именно в тех местах, где трутся друг о друга при ходьбе.

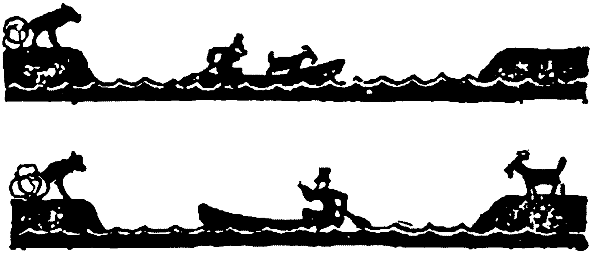
— Что за оказия, — подумал Леонид Михайлович, — по глубокой грязи не ходил, а до колен испачкался.

Теперь нам с вами ясно, чем объясняется такая «оказия».

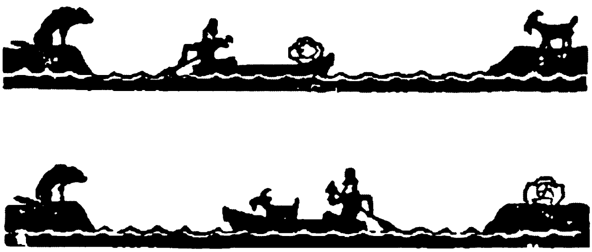
10. Мальчики переехали реку. Один из них остался на берегу, а другой пригнал лодку к солдатам и вылез. В лодку сел солдат и переправился на другой берег. Мальчик, остававшийся там, пригнал обратно лодку к солдатам, взял своего товарища, отвез на другой берег и снова доставил лодку обратно, после чего вылез, а в нее сел второй солдат и переправился.

Таким образом после каждых двух перегонов лодки через реку и обратно переправлялся один солдат. Так повторялось столько раз, сколько было человек в отряде.

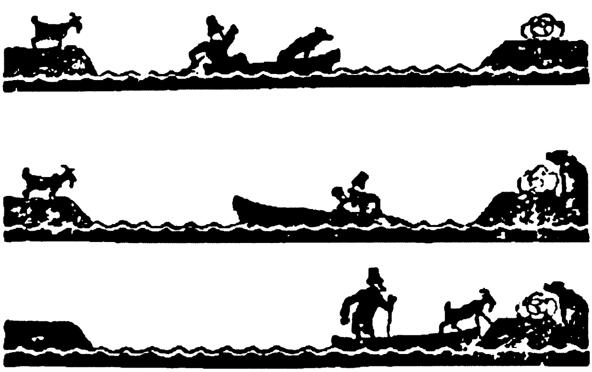
11. Волк не ест капусту, следовательно, начинать переправу нужно с козы, так как волка и капусту можно оставить на берегу без человека.



Переправив козу на другой берег, человек возвращается, берет в лодку капусту и также перевозит ее на другой берег, где ее оставляет, но зато берет в лодку козу и везет ее обратно — на первый берег.



Здесь он козу оставляет и перевозит волка. Капусту он оставляет с волком, а сам возвращается за козой, перевозит ее, и переправа оканчивается благополучно.



12. Рис. 225 показывает схему необходимых передвижений.

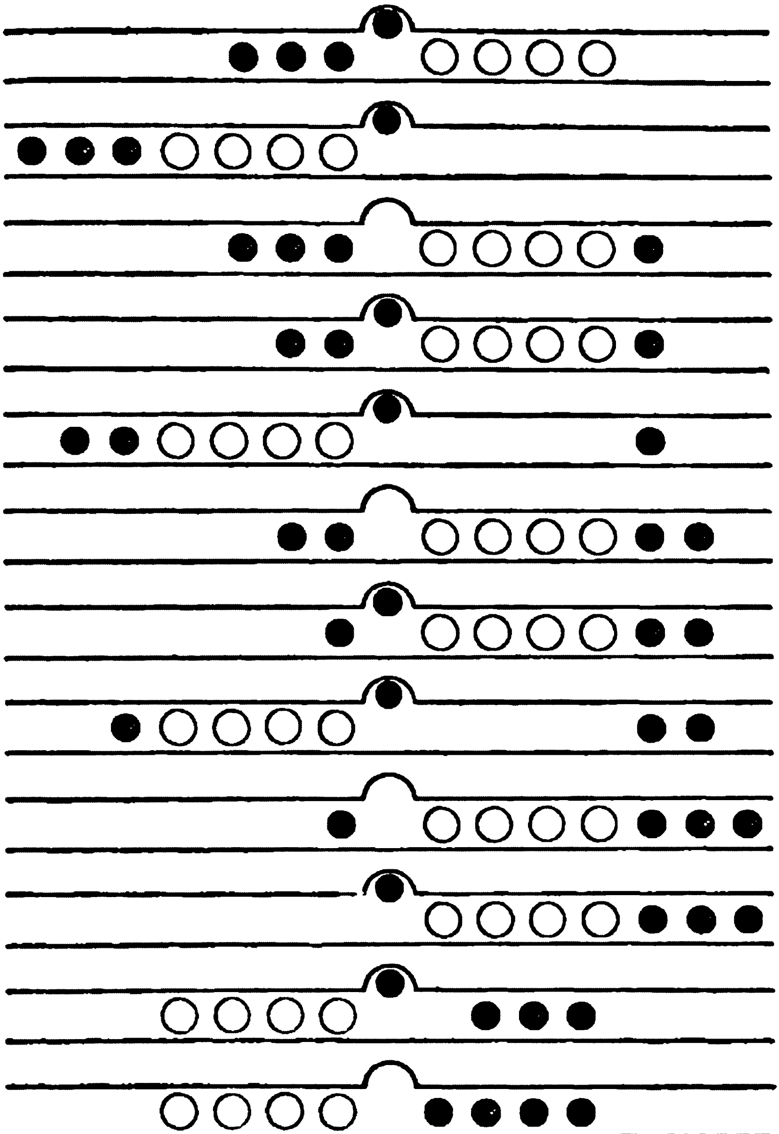
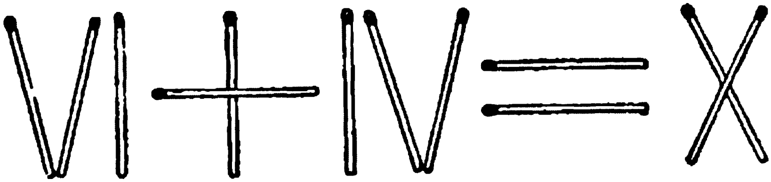


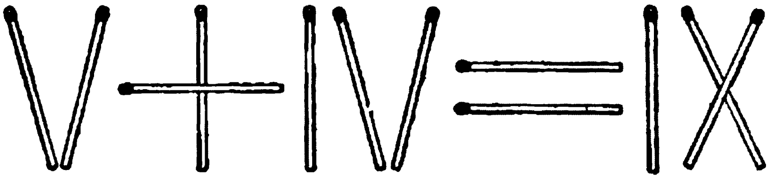
Рис. 225

13. Мастер расковал три кольца одного звена (три операции) и ими соединил остальные четыре звена (еще три операции, всего шесть).

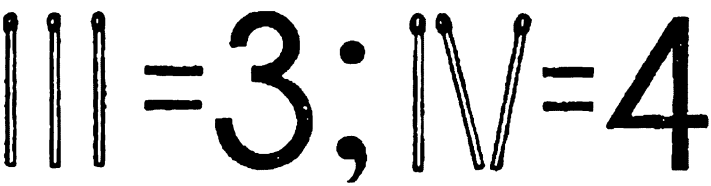
14. Первое решение:



Второе решение:



15.



16. Из данных пяти спичек нужно составить римскую цифру восемь (см. рис. 226).

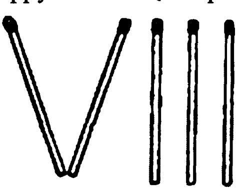


Рис. 226

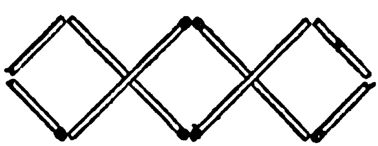


Рис. 227

17. Решение показано на рис. 227.

18. При недостаточно внимательном отношении к условию задачи рассуждают так: тридцать шесть заготовок — это тридцать шесть деталей; так как стружки каждых шести заготовок дают еще одну новую заготовку, то из стружек тридцати шести заготовок образуется шесть новых заготовок — это еще шесть деталей; всего 36 + 6 = 42 детали. Забывают при этом, что стружки, получившиеся от шести последних заготовок, тоже составят новую заготовку, то есть еще одну деталь. Таким образом, всего деталей будет не 42, а 43.

19. На рис. 228 показано расположение кресел, удовлетворяющее условию задачи.

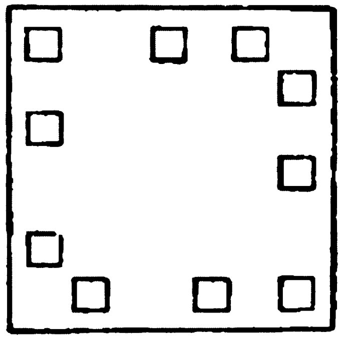


Рис. 228

20. Два из возможных решений показаны на рис. 229.

21. Возможные варианты расположения чисел показаны на рис. 230. Сумма чисел вдоль каждой стороны первого треугольника равна 17, а вдоль каждой стороны второго и третьего — 20. Могут быть и иные расположения чисел.

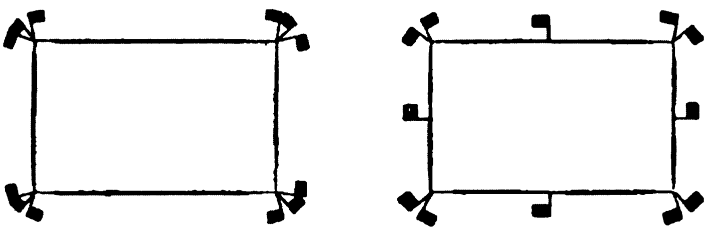


Рис. 229

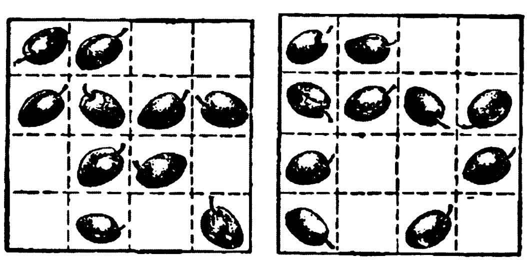


Рис. 230

22. При тринадцати играющих можно мяч бросать и через пять человек (рис. 231). Если бросать через шесть человек (ловит мяч каждый седьмой), то окажется, что мяч пошел в противоположном направлении.

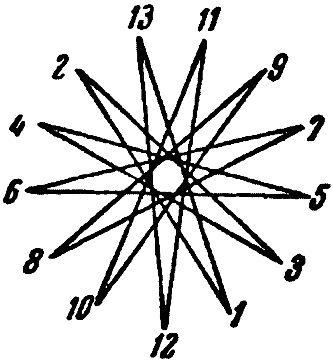


Рис. 231

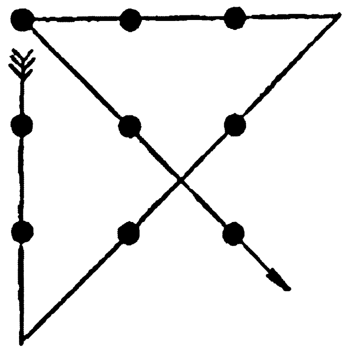


Рис. 232

23. Одно из возможных решений показано на рис. 232.

24. Решение показано на рис. 233.

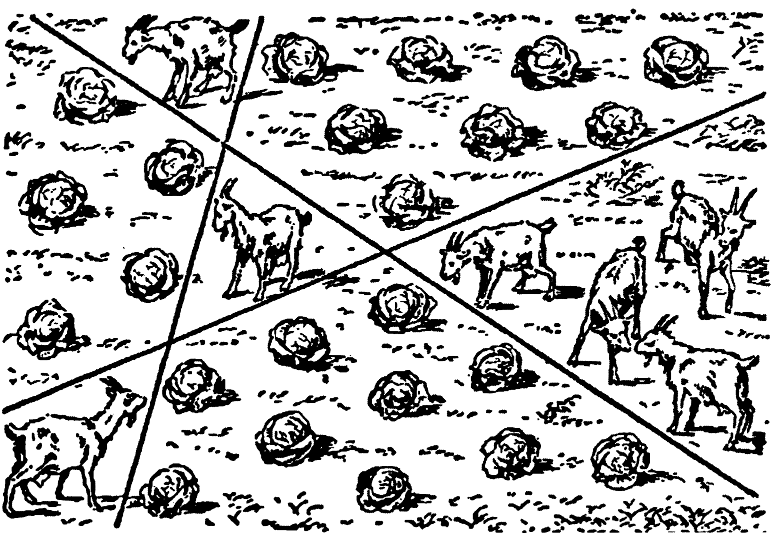


Рис. 233

25. Где бы оба поезда ни встретились, за час до своей встречи они будут друг от друга на расстоянии 130 км (70 + 60).

26. Когда задача касается какого-либо физического явления, то непременно следует учитывать все его стороны, чтобы не попасть впросак. Так и здесь. Никакие расчеты не приведут к истинному результату, если не принять во внимание, что вместе с водой поднимутся и корабль и лестница, так что в действительности вода никогда не покроет третьей ступеньки.

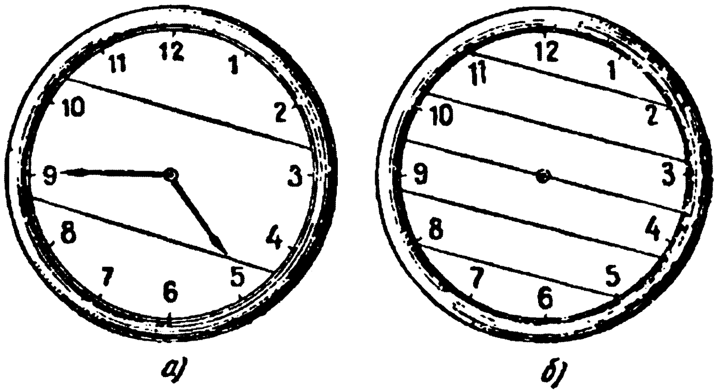


Рис. 234

27. а) Сумма всех чисел на циферблате равна 78. Значит, сумма чисел в каждой части циферблата должна быть равна 78 : 3 = 26. Замечаем, что 12 + 1 = 13 и 11 + 2 = 13.

Отсюда напрашивается то решение, которое приведено на рис. 234, *а*.

б) Сумма чисел в каждой из шести частей циферблата должна быть равна 78 : 6 = 13. Находим на циферблате такие пары чисел, сумма которых равна 13, и получаем решение, показанное на рис. 234, *б*.

28. В числах IX, X и XI — три десятки (X) расположены рядом. Ясно, что две из них должны войти в один кусок. Представляются только два возможных варианта. После нескольких проб вы получите такое расположение трещин, которое показано на рис. 235. Сумма чисел в каждом куске циферблата равна 20.

29. Проверив механизм часов, ученик подобрал подходящие стрелки, но неправильно надел их: минутную стрелку — на ось часовой, а часовую — на ось минутной. В результате минутная стрелка стала вращаться на циферблате со скоростью часовой стрелки, то есть очень медленно, а часовая стрелка стала вращаться, как минутная, — быстро.

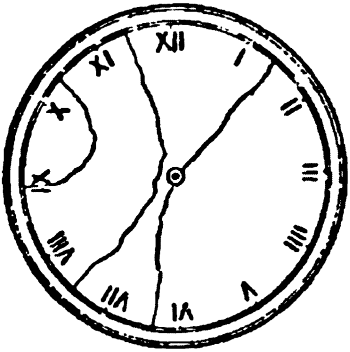


Рис. 235

В первый раз ученик вернулся к заказчику примерно через 2 часа 10 минут после того, как поставил часы на 6 часов вечера.

Большая стрелка, двигаясь со скоростью часовой, передвинулась от 12 до 2. Маленькая же стрелка, будучи минутной, сделала два полных круга и прошла еще 10 минут. Таким образом, часы показывали в этот момент точное время.

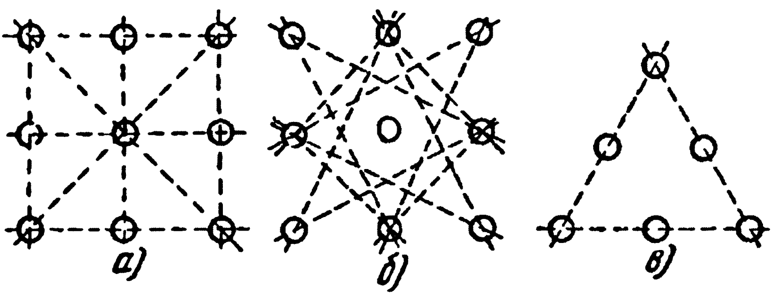


Рис. 236

Нетрудно подсчитать, что по вторичному вызову, на утро следующего дня, ученик пришел через 13 часов 5 минут после того, как поставил вначале стрелки на шесть часов. За это время большая стрелка, будучи часовой, прошла тринадцать часов и таким образом достигла цифры 1.

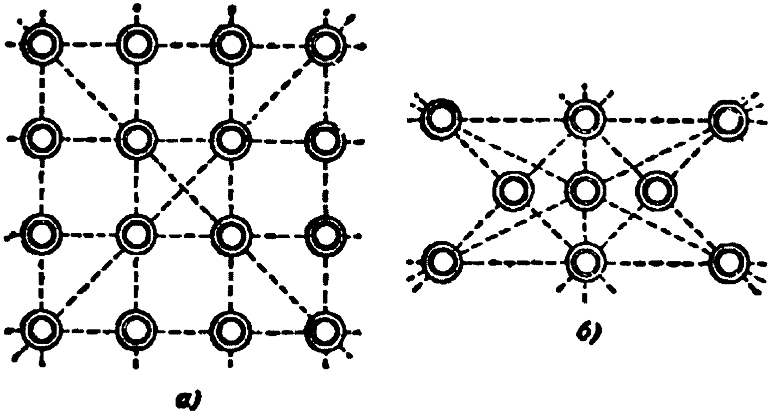


Рис. 237

Маленькая же стрелка, будучи минутной, сделала за это время тринадцать полных оборотов и прошла еще пять минут, достигнув, таким образом, цифры 7. Поэтому и во втором случае совпадения часы показывали точное время.

30. По три пуговицы — восемь рядов (см. схему на рис. 236, *а*), по две пуговицы — двенадцать рядов (рис. 236, *б*) (ряды показаны пунктирными прямыми).

Оставшиеся шесть пуговиц располагаются в три ряда по три пуговицы в каждом в форме треугольника (рис. 236, *в*).

31. Расположение шестнадцати шашек в десять рядов по четыре в ряд показано на рис. 237, *а*. Расположение девяти шашек в десять рядов показано на рис. 237, *б*.

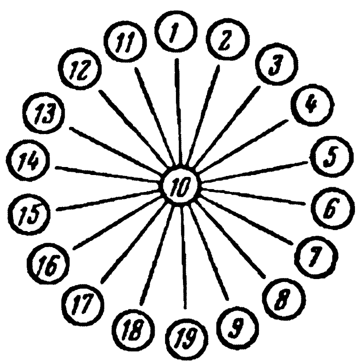


Рис. 238

32. Замечая, что $1 + 19 = 20$, $2 + 18 = 20$, $3 + 17 = 20$ и т. д., записываем слагаемые каждой суммы в противоположные кружочки, а число 10 поместим в центральный кружочек. Полностью решение задачи показано на рис. 238.

33. а) Часто отвечают, что пассажиры автобуса будут дальше от Москвы, чем велосипедист, что неверно, так как встретившиеся путешественники находятся в одном месте и, следовательно, *на одинаковом расстоянии* от Москвы.

б) Шесть ударов продолжались 30 секунд, значит на двенадцать ударов потребуется 60 секунд, или 1 минута, — вот часто встречающийся неправильный ход мысли.

Ведь когда часы били шесть ударов, то между ударами было только пять промежутков, каждый из которых длился 30 : 5 = 6 секунд. А между первым и двенадцатым ударами — одиннадцать промежутков продолжительностью по 6 секунд каждый.

Значит, на двенадцать ударов потребуется 66 секунд.

в) Всегда.

34. Решение показано на рис. 239.

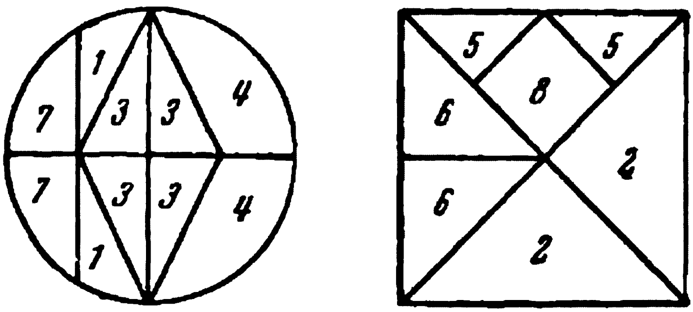


Рис. 239

35. На первый взгляд задача кажется сложной, требующей специальных рассуждений. Вдумавшись, легко понять, что муха, не останавливаясь, летала ровно три часа, а следовательно, пролетела 300 км.

36. 1961 год. Единица при поворачивании бумажки остается единицей, 6 превращается в 9, а 9 — в 6.

37. 1. Девочка прочла число в перевернутом виде: 98 вместо 86.

2. Поменять местами бумажки с числами 8 и 9, при этом 9 перевернуть, как 6. Тогда в каждом столбике будет по 18.

38. 23 года. Разность между годами отца и сына равна 23 годам; следовательно, сыну надо иметь 23 года, чтобы отец был вдвое старше его.

39. На первый взгляд кажется, что результаты сложения чисел каждого столбца не должны быть одинаковыми, но, присмотревшись чуть внимательнее, можно заметить, что если во втором столбце девять единиц (9-1), то соответственно в первом столбце — одна девятка (1-9); во втором столбце восемь двоек (8-2), но в первом — две восьмерки (2-8), во втором столбце семь троек (7-3), но в первом — три семерки (3-7) и т.д.

Отсюда следует, что результаты сложения чисел в обоих столбцах должны быть одинаковыми. Убедитесь в этом простым сложением.

40. В первой и пятой строках числа единиц дополняют друг друга до 10, а числа десятков, сотен и всех остальных разрядов соответственно дополняют друг друга до 9, следовательно, сумма чисел в этих двух строках равна 1 000 000.

Та же особенность обнаруживается и в остальных трех парах чисел, втором и шестом, третьем и седьмом, четвертом и восьмом.

Сумма каждой пары чисел равна 1 000 000. Значит, сумма всех восьми чисел равна 4 000 000.

Ответ ко второму фокусу. Вероятно, вы догадались, что приписывается такое число, все цифры которого дополняют до числа 9 цифры одного из двух написанных чисел (например, второго). При этом условии последняя цифра суммы, очевидно, будет на 1 меньше последней цифры первого слагаемого, а все остальные цифры суммы будут такие же и в том же порядке, как и у первого слагаемого, а самой первой цифрой суммы будет всегда 1.

Таким образом, начиная писать сумму слева направо, напишите 1, затем повторите все цифры первого слагаемого, кроме последней, которую нужно уменьшить на 1.

Попрактикуйтесь, прежде чем будете показывать товарищам математические фокусы.

41. Четыре брата и три сестры.

42. $28 = 22 + 2 + 2 + 2$ и $1000 = 888 + 88 + 8 + 8 + 8$.

43. $100 = 111 - 11$, $100 = 5 \times 5 \times 5 - 5 \times 5$,

$100 = (5 + 5 + 5 + 5) \times 5$.

44.

$$1)\ +\begin{array}{r}100\\000\\005\\007\\999\\\hline 1111\end{array}\qquad 2)\ +\begin{array}{r}003\\000\\007\\990\\999\\\hline 1111\end{array}\qquad 3)\ +\begin{array}{r}100\\330\\505\\077\\099\\\hline 1111\end{array}\qquad 4)\ +\begin{array}{r}111\\333\\500\\077\\090\\\hline 1111\end{array}$$

45. Подобно тому, как заполнение ящика предметами разной величины начинают с наибольших предметов, так и составление заданной суммы лучше начинать с наибольших возможных слагаемых. По условию слагаемыми должны быть восемь нечетных чисел.

Рассуждаем так.

Ни одно из чисел 19, 17 и 15 не может быть слагаемым, так как в каждом из этих случаев не наберется остальных семи слагаемых. Если взять слагаемым число 13, то для составления числа 20 необходимо и достаточно прибавить к 13 семь раз по 1:

$$13 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 20.$$

Если первое слагаемое 11, то вторым слагаемым не могут быть 9, 7 или 5 (не набирается необходимого числа остальных слагаемых). Пробуем 3: $11 + 3 = 14$. До 20 остается шесть единиц и нам нужно шесть слагаемых. Следовательно, получаем второе решение:

$$11 + 3 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 20.$$

Берем первым слагаемым число 9. 7 не может быть вторым слагаемым ($9 + 7 = 16$; остается четыре единицы на шесть слагаемых). Попробуем 5. Имеем: $9 + 5 = 14$. На шесть слагаемых остается шесть единиц. Это возможно. Получаем третье решение:

$$9 + 5 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 20.$$

Пробуем 3. Имеем: $9 + 3 = 12$. Остается восемь единиц на шесть слагаемых. Прибавим еще 3. Тогда $9 + 3 + 3 = 15$. Остается пять единиц на пять слагаемых. Получаем четвертое решение:

$$9 + 3 + 3 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 20.$$

Система проб, я думаю, теперь ясна. Продолжайте рассуждения самостоятельно, полагая первым слагаемым 7, а затем 5 и 3. Всего получится одиннадцать следующих решений:

$$13 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 20,$$
$$11 + 3 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 20,$$
$$9 + 5 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 20,$$
$$9 + 3 + 3 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 20,$$
$$7 + 7 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 20,$$
$$7 + 5 + 3 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 20,$$
$$7 + 3 + 3 + 3 + 1 + 1 + 1 + 1 = 20,$$
$$5 + 5 + 5 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 20,$$
$$5 + 5 + 3 + 3 + 1 + 1 + 1 + 1 = 20,$$
$$5 + 3 + 3 + 3 + 3 + 1 + 1 + 1 = 20,$$
$$3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 1 + 1 = 20.$$

Есть только одно решение (шестое сверху), которое приводит к сумме, состоящей из наибольшего числа (из четырех) неодинаковых слагаемых.

46. Непосредственно считать все возможные маршруты от *A* до *C* сложно — запутаетесь. Нужно начать с подсчета маршрутов до перекрестков, более близких к начальному пункту *A* (рис. 240).

Очевидно, что в каждый перекресток, находящийся на сторонах *AB* и *AD*, ведет только один путь; в перекресток *2b* ведут два пути. В перекресток *2c* можно попасть, во-первых, из пункта *2b*, значит, тоже двумя маршрутами, и, во-вторых, из пункта *1c*, то есть еще одним маршрутом. Следовательно, всего к перекрестку *2c* ведут $2 + 1 = 3$ маршрута (найдите их). Аналогично рассуждая, получим, что и к перекрестку *3b* ведут три маршрута.

В перекресток $3c$ ведут те же три маршрута, которыми можно попасть в перекресток $3b$, и те три маршрута, которыми можно попасть в перекресток $2c$, то есть всего шесть маршрутов. Продолжая эти рассуждения, заметим, что вообще количество маршрутов, ведущих к любому перекрестку, равно сумме маршрутов, ведущих к двум смежным перекресткам, расположенным слева и снизу от рассматриваемого. Если, например, мы определили, что число маршрутов, ведущих в $3c$, равно шести, а в $2d$ равно четырем, то число маршрутов, ведущих в $3d$, будет равно десяти и т. д.

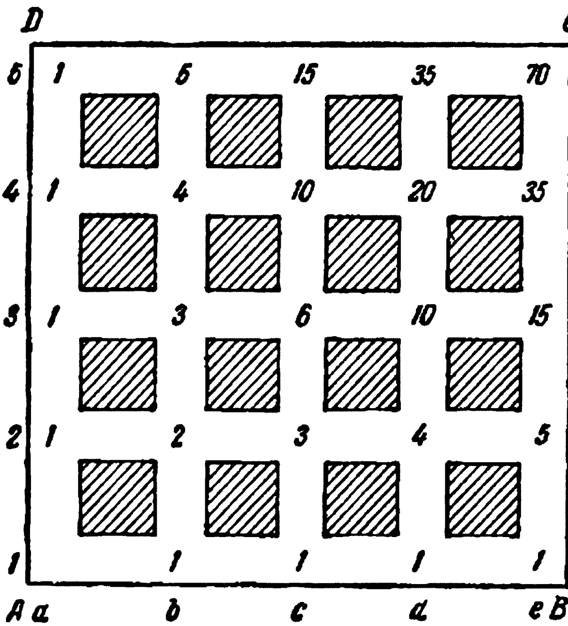


Рис. 240

Так можно определить число маршрутов, ведущих из начального пункта A к любому перекрестку. К конечному пункту C, таким образом, можно прийти семьюдесятью различными путями.

(Число маршрутов равно C_8^4; вообще: C_{m+n}^n, где m — число кварталов вдоль AB, n — число кварталов вдоль BC.)

47. Если на концах какого-либо диаметра поместить числа A и a, а на концах соседнего диаметра поместить числа B и b, то по условию $A + B = a + b$. Отсюда $A - a = b - B$, то есть разности противоположно расположенных чисел должны быть равны между собой.

В этом ключ к отысканию всех решений задачи.

Очевидно теперь, что для решения задачи нужно разбить все данные целые числа от 1 до 10 на пять пар с одинаковыми разностями чисел в каждой паре. Как легко убедиться, возможны только две группы пар, удовлетворяющих этому условию:

а) с разностью = 1	б) с разностью = 5
1 – 2	1 – 6
4 – 3	7 – 2
5 – 6	3 – 8
8 – 7	9 – 4
9 – 10	5 – 10

Расположив эти числа по кругу, получаем два основных решения (рис. 241). Все остальные решения можно образовать из основных, перемещая пары чисел с одного диаметра на другой, так как чередование пар внутри одной группы может быть произвольным.

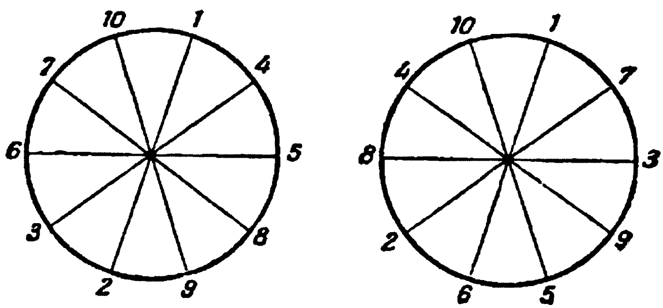


Рис. 241

Так, рядом с парой 1–2, разместившейся на первом диаметре, можно поместить на втором диаметре пару 4–3, или пары 6–5, 8–7, или 10–9.

Это дает четыре различных решения. В каждом из получающихся положений на третьем диаметре можно поместить любую из оставшихся трех пар. Это дает $4 \times 3 = 12$ решений. В каждом из них две возможности для размещения оставшихся двух пар на четвертом и пятом диаметрах. Это приводит к $12 \times 2 = 24$ решениям для каждой группы пар чисел.

Всех решений 48. (Число решений равно удвоенному числу перестановок из четырех элементов: $2 \times P_4$.)

48. Из *четырех* чисел возможна только одна группа:

$$1 + 1 + 2 + 4 = 1 \times 1 \times 2 \times 4.$$

Из *пяти* чисел — три:

$$1 + 1 + 1 + 2 + 5 = 1 \times 1 \times 1 \times 2 \times 5,$$
$$1 + 1 + 1 + 3 + 3 = 1 \times 1 \times 1 \times 3 \times 3,$$
$$1 + 1 + 2 + 2 + 2 = 1 \times 1 \times 2 \times 2 \times 2.$$

Требуемые группы из шести или семи и т. д. чисел по аналогии составьте самостоятельно. Возьмите, скажем, два числа 2 и 6 и их сумму $2 + 6$ дополняйте единицами до произведения $2 \times 6 = 12$, а произведение 2×6 в свою очередь умножайте на соответствующее количество единиц.

49. $9 + 8 + 7 + 65 + 4 + 3 + 2 + 1 = 99$ или
$9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 43 + 21 = 99$; $1 + 2 + 34 + 56 + 7 =$
$= 100$ или $1 + 23 + 4 + 5 + 67 = 100$.

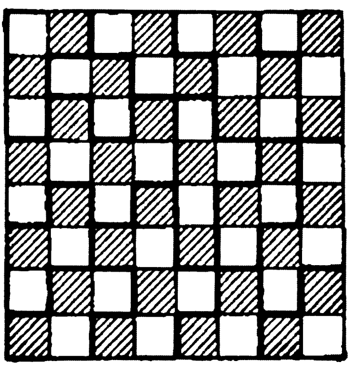


Рис. 242

50. Возможное решение показано на рис. 242.

51. Одно из возможных решений представлено на рис. 243. Путь одного сапера изображен сплошной линией, а путь другого — пунктиром. Оба сапера обошли ровно по сорок клеток поля, побывав на каждой клетке по разу.

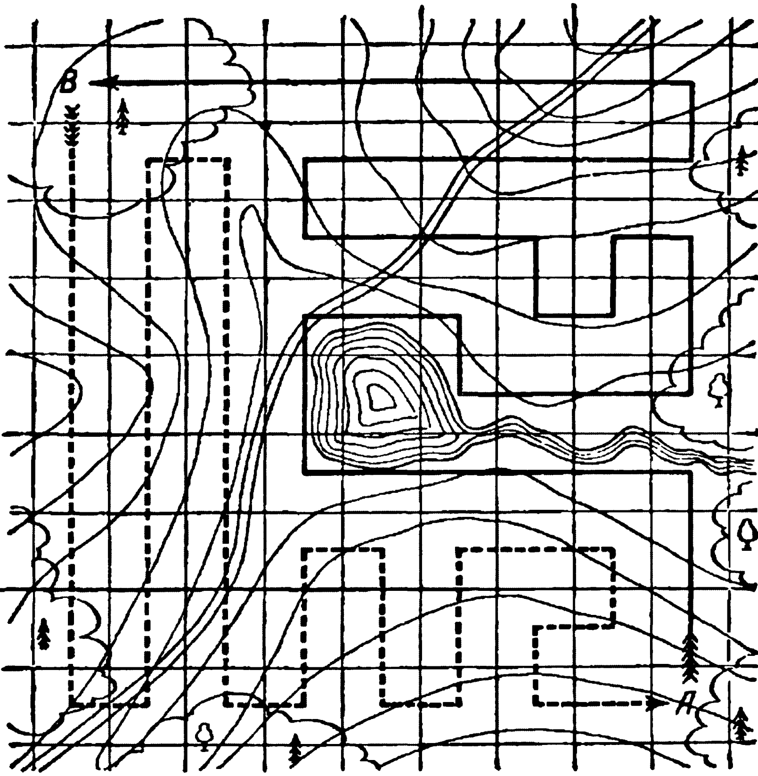


Рис. 243

52. Нужно иметь в виду, что не всякое иное решение будет новым или, как говорят в математике, существенно отличным от приведенного в тексте. Предположим, вы нашли такой порядок распределения спичек (сравните с решением, представленным на рис. 25): № 7 к № 10, № 4 к № 8, № 6 к № 2, № 5 к № 9 и № 1 к № 3. Это решение не будет «совсем другим», как требуется по условию задачи, так как полностью повторяет порядок распределения, предложенный в тексте задачи. В этом легко убедиться, если спички перенумеровать не слева направо, а справа налево.

Существенно новым решением будет, например, следующее: № 5 к № 2, № 7 к № 10, № 3 к № 8, № 1 к № 4, № 9 к № 6.

53. Чтобы легко было пользоваться указанной далее схемой перемещения спичек, напишите на бумаге пятнадцать целых чисел, начиная с 1, и над каждым числом расположите спички, как показано на этом рисунке:

Перемещайте спички в следующем порядке: №5 к №1, №6 к №1, или схематично: 5 → 1, 6 → 1, 9 → 3, 10 → 3, 8 → 14, 7 → 14, 4 → 2, 11 → 2, 13 → 15, 12 → 15.

Второе решение: 5 → 1, 6 → 1, 9 → 3, 10 → 3, 8 → 14, 4 → 13, 11 → 14, 15 → 13, 7 → 2, 12 → 2.

54. Вся изюминка решения заключается в том, что, уходя из дома, я догадался пустить в ход свои стенные часы и заметить по ним, в котором часу я вышел, а затем — в котором часу вернулся. Так, по своим часам я смог определить, сколько времени я отсутствовал. Придя к знакомому и уходя от него, я заметил показания его часов. Это дало мне возможность определить продолжительность пребывания в гостях.

Вычитая из продолжительности времени, которое я отсутствовал дома, продолжительность пребывания в гостях, я получил количество времени, затраченного на дорогу туда и обратно. Прибавив половину этого количества времени к показанию часов товарища, когда я от него уходил, я в сумме получил то показание часов, на которое следовало поставить мои стенные часы.

55. $(1 + 2) : 3 = 1,$

$12 : 3 : 4 = 1,$

$[(1 + 2) \times 3 - 4] : 5 = 1,$

$(1 \times 2 + 3 - 4 + 5) : 6 = 1,$

$\{[(1 + 2) \times 3 - 4] : 5 + 6\} : 7 = 1,$

$[(1 + 2) : 3 \times 4 + 5 + 6 - 7] : 8 = 1,$

$(1 \times 2 + 3 + 4 - 5 + 6 + 7 - 8) : 9 = 1.$

56. Счетчик машины показывал 15 951. Цифра десятков тысяч не могла измениться через два часа. Следовательно, первой и последней цифрой нового симметричного числа остается 1. Цифра тысяч могла и должна измениться, так как за два часа машина прошла, конечно, больше 49 км, но никак не больше 1000 км; следовательно, цифра тысяч, а вместе с нею и цифра десятков — 6.

Очевидно, что цифра сотен — 0 или 1, и счетчик показывал либо число 16 061, либо число 16 161.

Число сотен вряд ли могло достигнуть 2, так как в этом случае получилось бы, что машина за два часа прошла 16 261 – 15 951 = 310 км, а такая скорость довольно высока.

Если счетчик показал число 16 061, то машина прошла за два часа 16 061 – 15 951 = 110 км и, следовательно, имела скорость

$$110 : 2 = 55 \text{ км в час.}$$

Во втором случае скорость — 105 км/час.

57. Для решения задачи нужно знать количество приборов, смонтированных бригадиром. А для этого в свою очередь нужно знать, сколько приборов в среднем было смонтировано каждым из десяти членов бригады. Распределив поровну между девятью молодыми рабочими 9 приборов, изготовленных добавочно бригадиром, мы узнаем, что в среднем каждый член бригады смонтировал $15 + 1 = 16$ приборов. Отсюда следует, что бригадир изготовил $16 + 9 = 25$ приборов, а вся бригада $(15 \times 9) + 25 = 160$ приборов.

Знающие алгебру могут решить эту задачу путем составления одного уравнения с одним неизвестным.

58. Если бы мы наблюдали движение встречных электричек из вагона *стоящей* электрички, то расчет первой подруги был бы верен, но наш вагон двигается навстречу обратным электричкам, следовательно, если от встречи нашей электричкой с одной обратной электричкой до встречи с другой обратной электричкой прошло 5 минут, то это значит, что вторая электричка придет на то место, где мы встретились с первой, еще через 5 минут, то есть промежутки времени между прибытиями встречных электричек равны 10 минутам.

Таким образом, в течение часа прибывает в город не 12 электричек, а только 6.

59. Требуется найти сумму *цифр* чисел

1, 2, 3, 4, ..., 999 999 998, 999 999 999, 1 000 000 000. Нужно сгруппировать числа парами:

999 999 999 и 0,
999 999 998 и 1,
999 999 997 и 2 и т. д.

Пар будет полмиллиарда (500 000 000), а сумма цифр в каждой паре 81. Последнее число 1 000 000 000 не имеет пары, и сумма его цифр равна 1.

Искомая сумма цифр равна $(500\,000\,000 \times 81) + 1 = 40\,500\,000\,001$.

60. Если достаточно маленький мячик, оставаясь на полу, прижмется к любой стене комнаты в любом месте, то большой чугунный шар там его не раздавит. Мячику может мешать плинтус между стеной и полом; в этом случае ему нужно прижаться в угол.

Знающие геометрию могут рассчитать, что если диаметр маленького шарика примерно в 5,83 раза (точно в $3 + 2\sqrt{2}$ раза) меньше диаметра большого шара, то, прижавшись к стене, как показано на рис. 244, маленький шарик будет в безопасности.

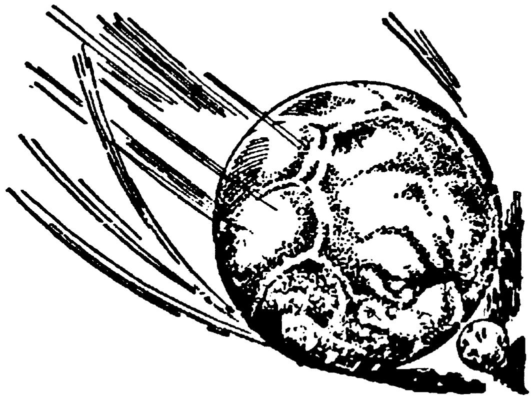


Рис. 244

Футбольный мяч и шарик для настольного тенниса имеют узаконенные размеры, и простое сравнение отношения их диаметров с числом 5,83 покажет вам, что прижавшемуся к стене шарику не угрожает опасность быть раздавленным.

61. В $2\frac{1}{2}$ раза.

62. Запятую; получится 2,3.

63. а) $\frac{1}{5}$; б) $\frac{1}{7}$.

64. Если $\frac{1}{2}$ есть треть искомого числа, то все число содержит три раза по $\frac{1}{2}$, то есть $1\frac{1}{2}$.

65. Расстояние от здания с часами до станции составляет $\frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$ всего пути школьника. Это расстояние он проходил за 5 минут. Следовательно, на весь путь ему нужно $12 \times 5 = 60$ минут, или 1 час; $\frac{1}{4}$ пути он делал за $60 : 4 = 15$ минут, следовательно, он выходил в 7 часов 15 минут, а в школу приходил в 8 часов 15 минут.

66. Ответ — не 12 секунд! Дело в том, что от первого флажка до восьмого — 7 промежутков. От первого до двенадцатого — 11 промежутков. Каждый промежуток между флажками спортсмен пробегает за $\frac{8}{7}$ секунды, следовательно, на 11 промежутков ему потребуется $\frac{8}{7} \times 11 = \frac{88}{7} = 12\frac{4}{7}$ секунд.

67. За $3\frac{1}{2}$ часа будильник отстает на 14 минут. В 12 часов на будильнике будет 11 часов 46 минут. До 12 остается 14 минут, но за эти 14 минут будильник еще отстанет на минуту. Таким образом, стрелки будильника покажут 12 через 15 минут.

68. $\frac{1}{4}$ бруска весят $\frac{3}{4}$ кг, а весь брусок весит 3 кг.

69. 1. $\frac{3}{3}$, $\frac{2}{2}$, $\frac{1}{1}$, $\frac{9}{9}$ и т. д.

2. $37 = \frac{333}{3\times3}$.

3. Например, $99 + \frac{99}{99}$.

4. $44 + \frac{44}{4}$.

5. $9 + \frac{99}{99}$.

6. См. рис. 245; $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

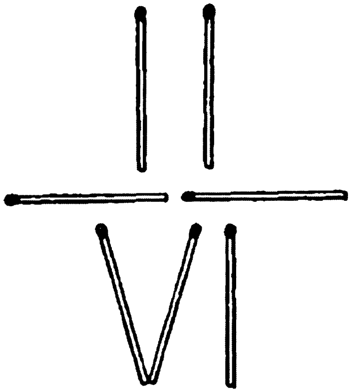


Рис. 245

7. $1 + 3 + 5 + 7 + \frac{75}{75} + \frac{33}{11}$.

8. $79\frac{1}{3} + 5 = 84 + \frac{2}{6}$.

9. 1 и $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$ и $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{n}$ и $\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}$, где n — любое целое число, начиная с 1, или x и $\frac{x}{x+1}$, где x — произвольное число (кроме $x = -1$).

10. $\frac{35}{70} + \frac{148}{296} = 1$, $0{,}5 + \frac{1}{2}(9 - 8)\ (7-6)\ (4 - 3) = 1$.

Возможны и другие решения.

11. $78\frac{3}{6} + 21\frac{45}{90} = 100$, или $50\frac{1}{2} + 49\frac{38}{76} = 100$.

Возможны и другие решения.

70. Одно из возможных решений:

$$\frac{1}{3}+\frac{6}{1}+\frac{3}{4}+\frac{5}{3}+\frac{5}{4} = 10;$$

$$\frac{2}{1}+\frac{5}{1}+\frac{2}{6}+\frac{6}{3}+\frac{4}{6} = 10;$$

$$\frac{4}{1}+\frac{2}{3}+\frac{4}{2}+\frac{5}{2}+\frac{5}{6} = 10.$$

71. Нетрудно понять, что $\frac{3}{4}$ котенка приходится на долю $\frac{3}{4}$ всех Мишиных котят. Значит, всех котят было вчетверо больше, чем $\frac{3}{4}$, то есть 3.

Проверка: $\frac{3}{4}$ от 3 составляют $2\frac{1}{4}$; если к $2\frac{1}{4}$ котят прибавить еще $\frac{3}{4}$ котенка, то получится ровно 3 котенка.

72. Не подумав, можно ответить: 8 км/час $\left(\frac{12+4}{2} = 8\right)$, но это не так. Примем все расстояние за 1. Тогда первую половину пути лошадь шла $\frac{1}{2} : 12 = \frac{1}{24}$ единиц времени, а вторую половину — за $\frac{1}{2} : 4 = \frac{1}{8}$ единиц времени. На весь путь затрачено

$\frac{1}{24} + \frac{1}{4} = \frac{1}{6}$ единиц времени. Следовательно, средняя скорость будет $1 : \frac{1}{6} = 6$ км/час.

73. Спал пассажир на протяжении двух третей от половины всего пути, следовательно, на протяжении одной трети всего пути.

74. Велосипедист прошел пешком $\frac{1}{3}$ пути, то есть вдвое меньше того, что проехал, а времени затратил вдвое больше. Следовательно, он ехал в четыре раза быстрее, чем шел.

75. Володя сделал $\frac{2}{3}$ задания, и ему осталось делать $\frac{1}{3}$ всего задания. Костя сделал $\frac{1}{6}$ задания, и ему осталось делать $\frac{5}{6}$ всего задания.

Следовательно, Косте надо увеличить ежедневную выработку в $\frac{5}{6} : \frac{1}{3} = 2\frac{1}{2}$ раза, чтобы догнать Володю и одновременно с ним закончить работу.

76. Права Машина подруга. От увеличения одного сомножителя на $\frac{1}{3}$ его произведение увеличивается в $\frac{4}{3}$ раза. От уменьшения другого сомножителя на $\frac{1}{3}$ его (независимо от того, равен ли он тому сомножителю, который был увеличен) произведение уменьшилось в $\frac{3}{2}$ раза. В результате произведение уменьшилось в $\frac{3}{2} : \frac{4}{3} = \frac{9}{8}$ раза, и от правильного произведения оно составило $\frac{8}{9}$. Ошибка на $\frac{1}{9}$, которая составляет 20 кубометров. Отсюда ответ задачи: 180 кубометров.

77. Мама кладет два ломтика на сковородку и поджаривает одну их сторону в течение 30 секунд. Затем первый ломтик она переворачивает на другую сторону, а второй ломтик вынимает и кладет на его место третий. Таким образом, во вторые полминуты первый ломтик будет готов полностью, а третий — наполовину. Теперь у нее есть два ломтика (второй и третий), каждый из которых готов наполовину. Их поджаривание будет закончено в следующие полминуты. Общее время, как видите, $1\frac{1}{2}$, минуты, а не 2.

К главе II

78. Сначала пленники положили цепь (30 кг) в корзину и отправили ее вниз. В поднявшуюся наверх пустую корзину села девочка-служанка (40 кг) и опустилась вниз; в то же время корзина с цепью поднялась вверх. Хечо вынул цепь и посадил в корзину Дариджан (50 кг). Дариджан опустилась вниз, поднимая вверх служанку-девочку. Хечо вышла из корзины на землю, а девочка из поднявшейся корзины — в башню. В освободившуюся наверху корзину Хечо снова положил цепь и вторично опустил ее на землю. На земле в корзину с цепью села Дариджан (50 + 30 = = 80 кг), а в поднявшуюся корзину сел Хечо (90 кг). Давид спустился, вышел из корзины на землю, а Дариджан вышла из поднявшейся корзины в башню. Цепь она оставила в поднявшейся корзине. Цепь в третий раз опустилась на землю. В поднявшуюся корзину снова села девочка (40 кг) и опустилась на землю, поднимая цепь (30 кг). Дариджан вынула цепь, села в корзину (50 кг) и опустилась вниз, поднимая вверх девочку (40 кг). Дариджан вышла на землю, а девочка в башню. Девочка положила в корзину цепь и опять опустила ее на землю, затем сама села в поднявшуюся пустую корзину и опустилась вниз, поднимая цепь наверх. Приземлившись, девочка присоединилась к ожидавшим ее Дариджан и Хечо, а цепь в последний раз упала на землю. Все трое благополучно укрылись в горах от свирепого князя.

79. Отсчитайте, например, по ходу часовой стрелки от белой мыши (ее не считая) *шестую* мышь. С этой мыши и следует начинать счет, обходя круг в том же направлении (по ходу часовой стрелки). Чтобы установить заранее, с какой мыши нужно начинать счет, расположите по кругу двенадцать точек и один крестик (рис. 246) и начните счет с крестика. Обходя круг в одном направлении, вычеркивайте каждую тринадцатую точку (и крестик, когда до него дойдет очередь) до тех пор, пока не останется одна точка. Поставьте теперь вместо этой точки белую мышь, тогда крестик укажет, с какой серой мыши следует начинать счет.

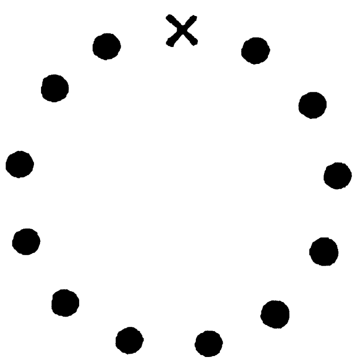


Рис. 246

80. Подобно предыдущему, легко установить, что в первую очередь нужно снять пятую спичку вправо от той, которая повернута головкой к монете (ее не считая).

81. Секрет в том, чтобы каждый раз монета ложилась около того луча, от которого вы перед этим начали счет. Допустим, вы начинаете счет от пятого луча (рис. 247). Первая монета ляжет против седьмого луча. Теперь нужно положить монету против пятого луча. Для этого счет придется начать от третьего. В третий раз начнем счет от первого луча, тогда монета ляжет против третьего луча и т. д.

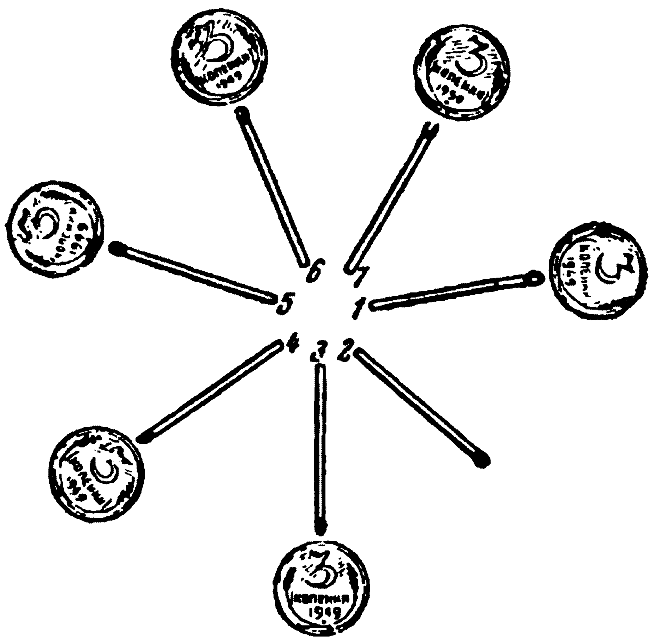


Рис. 247

82. Машинист ремонтного поезда заводит в тупик три задних вагона своего поезда, отцепляет их, а остальную часть поезда проводит вперед. Пассажирский поезд продвигается вперед следом за ремонтным и, подойдя к тупику, прицепляет к своему хвосту три вагона ремонтного состава, вместе с ними отходит назад, на прежнее место, и там их отцепляет. Тем временем заходит в тупик остальная часть ремонтного поезда — паровоз и два вагона, и путь для пассажирского свободен!

83. *Схема решения.* Пусть папы — *А, Б, В,* а дочки соответственно — *а, б, в.*

Первый берег	Второй берег
А Б В	. . .
а б в	. . .

I. Сначала отправляются две девочки:

А Б В	. . .
а . .	. *б в*

II. Одна из девочек возвращается и перевозит третью:

А Б В	. . .
. . .	*а б в*

III. Одна из девочек возвращается и остается со своим папой, а два других папы отправляются на другой берег:

А . .	. *Б В*
а . .	. *б в*

IV. Одни папа со своей дочкой возвращается на первый берег; девочка остается, а два папы отправляются на второй берег:

. . .	*А Б В*
а б .	. . *в*

V. Переезжает девочка и забирает с собой вторую девочку

. . .	*А Б В*
а . .	. *б в*

VI. За последней девочкой едет ее папа (или ее подруга):

. . .	*А Б В*
. . .	*а б в*

И переправа окончена к общему удовольствию.

84. *Переправа на лодке, поднимающей трех человек.* Пусть папы — *А*, *Б*, *В* и *Г*, а дочки соответственно — *а*, *б*, *в* и *г*.

Первый берег	В лодке	Второй берег
А Б В Г		. . . .
а б в г		. . . .

I. Отправляются три девочки:

А В В Г				. . . .
а . . .	→	*б в г*	→	. *б в г*

Две из них возвращаются:

А Б В Г				. . . .
а б в .	←	*б в*	←	. . . *г*

II. Отправляются папа с дочкой и еще один папа, дочка которого на втором берегу:

А Б . .	→	*В Г*	→	. . *В Г*
а б . .		*в*		. . *в г*

Один папа со своей дочкой возвращается:

А Б В .	←	*В*	←	. . . *Г*
а б в .		*в*		. . . *г*

III. Отправляются три папы:

. . . .	→	*А Б В*	→	*А Б В Г*
а б в .				. . . *г*

Возвращается одна девочка:

. . . .				*А Б В Г*
а б в г	←	*г*	←	. . . .

IV. Вернувшаяся девочка забирает с собой еще двоих:

. . . .				*А Б В Г*
а . . .	→	*б в г*	→	. *б в г*

Возвращается папа за своей дочкой (или какая-нибудь девочка за своей подругой):

А . . .	←	*А*	←	*. Б В Г*
а . . .				*. б в г*

V. Отправляется последняя пара:

. . . .	→	*А*	→	*А Б В Г*
. . . .		*а*		*а б в г*

Переправа закончена.

Переправа на лодке, поднимающей двух человек, но с пересадкой на острове.

	Первый берег	Остров	Второй берег	
	А Б В Г	. . . .	. . . .	
	а б в г	. . . .	. . . .	
I	*А Б В Г*	. . . .	. . . .	
	а б . .	*. . в г*	. . . .	
II	*А Б В Г*	. . . .	. . . .	
	а . . .	*. б в г*	. . . .	
III	*А Б . .*	*. . В Г*	. . . .	
	а б . .	*. . в г*	. . . .	
IV	*А Б . .*	*. . В Г*	. . . .	(*Г* отвез *г* на второй берег, а сам
	а б . .	*. . в .*	*. . . г*	вернулся на остров)
V	*А Б В.*	. . . .	*. . . Г*	(*В* отвез *Г* на второй берег, а сам
	а б . .	*. . в .*	*. . . г*	переправился на первый берег)
VI	*А Б В.*	. . . .	*. . . Г*	
	. . . .	*а б в .*	*. . . г*	
VII	*А . . .*	*. Б В .*	*. . . Г*	
	а . . .	*. б в .*	*. . . г*	
VIII	*А . . .*	. . . .	*. Б В Г*	
	а . . .	*. б в г*	. . . .	
IX	*А . . .*	*. Б . .*	*. . В Г*	(*Б* съездил за *А* и увез его сразу
	а . . .	*. б . .*	*. . в г*	на второй берег; *в* вернулась
				на остров)
X	. . . .	. . . .	*А Б В Г*	
	а...	*. б в .*	*. . . г*	
XI	. . . .	. . . .	*А Б В Г*	
	а . . .	. . . .	*. б в г*	
XII	. . . .	. . . .	*А Б В Г*	
	. . . .	. . . .	*а б в г*	

85. Пусть белые шашки (*б*) передвигаются и прыгают только вверх, а черные (*ч*) — только вниз (так как по условию они могут передвигаться исключительно навстречу друг другу). Будем перемещать шашки в такой последовательности: *чббчччб ббчччббч*. Для наглядности последовательность перемещения шашек изображена на рис. 248.

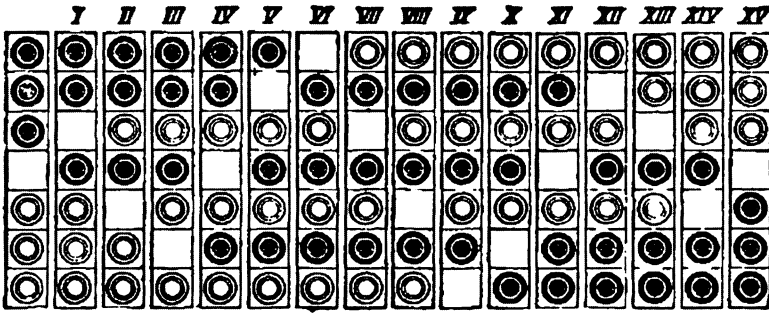


Рис. 248

86. Решение задачи представлено на рис. 249.

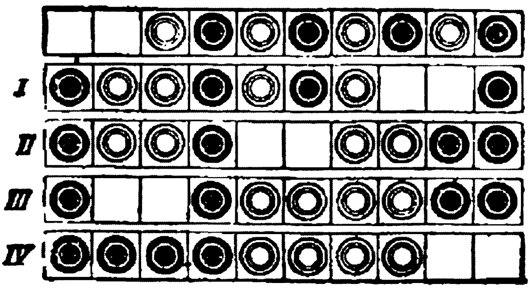


Рис. 249

После четвертого перемещения расположились подряд четыре белые и четыре черные шашки. От этого последнего расположения шашек можно, наоборот, перейти к первому также четырьмя перемещениями. Решить эту обратную задачу теперь нетрудно.

87. *Для пяти пар* решение представлено на рис. 250. *Для шести пар* — на рис. 251. *Для семи пар* — на рис. 252.

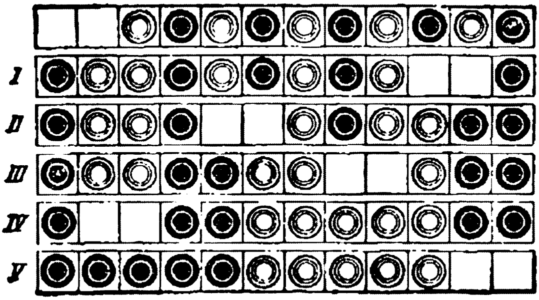


Рис. 250

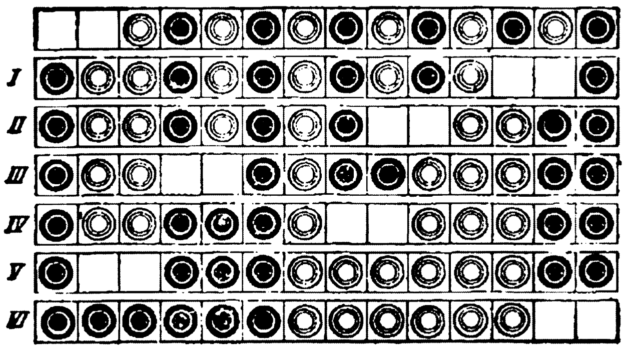


Рис. 251

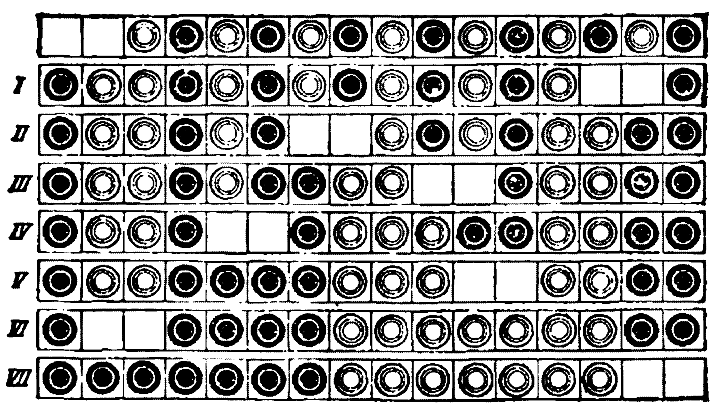
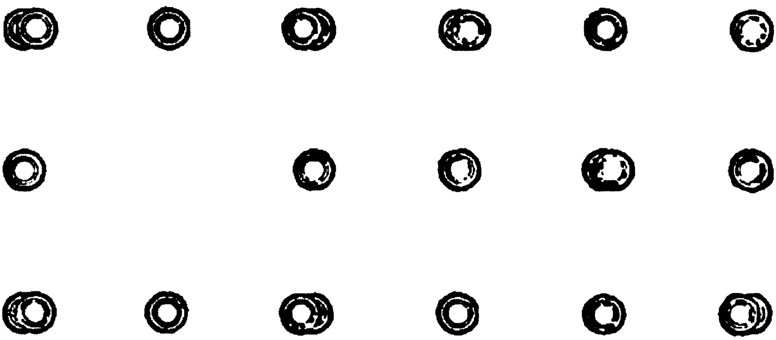


Рис. 252

88. Сложите карточки стопкой, цифрами вверх в такой последовательности: 1, 6, 2, 10, 3, 7, 4, 9, 5, 8.

89. Первая головоломка. В вершинах квадрата (рис. 253, *а*) нужно поместить по две шашки (положить одну на другую).

Вторая головоломка. Девять шашек расположить в форме квадрата (рис. 253, *б*). Получится три горизонтальных и три вертикальных ряда по три шашки в каждом ряду. Оставшиеся три шашки положить, как показано на рисунке. Получится в каждом горизонтальном и в каждом вертикальном рядах по четыре шашки.



а) б)

Рис. 253

90. Решения показаны на рис. 254.

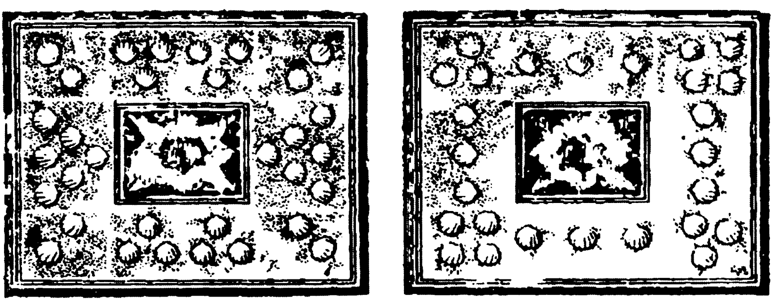


Рис. 254.

91. После первого штурма осталось в составе гарнизона 36 человек. Определим, сколько из них должны находиться в середине каждой стороны. Так как в первом и третьем рядах должно быть по 11 защитников, то во втором ряду 36 – 22 = 14 человек, то есть по 7 человек в серединах каждой из двух противоположных сторон, значит, по 7 человек и в серединах двух других сторон.

Всего в серединах сторон будет занято 28 человек. Остальные 8 человек по углам — по 2 человека в каждом углу. Получается следующая расстановка сил перед вторым штурмом:

I ряд	2	7	2
II ряд	7	36	7
III ряд	2	7	2

После второго штурма осталось 32 защитника крепости. Рассуждаем аналогично предыдущему. В первом и третьем рядах должно быть по-прежнему по 11 человек, во втором: 32 – 22 = 10 человек, то есть по 5 в середине каждой стороны крепости, следовательно, по углам 32 – 20 = 12 человек, по 3 человека в каждом углу. Получается следующая расстановка сил перед третьим штурмом:

I ряд	3	5	3
II ряд	5	32	5
III ряд	3	5	3

Таким же образом можно найти расстановку сил после третьего и четвертого штурмов:

4	3	4
3	28	3
4	3	4

5	1	5
1	24	1
5	1	5

После пятого штурма осталось 22 защитника крепости. В этом случае на долю середин сторон не остается сил, так как 22 – 22 = 0. Следовательно, все 22 человека должны расположиться только по углам:

6	—	5
—	22	—
5	—	6

При дальнейшем выходе из строя защитников крепости было бы невозможно расположить оставшиеся силы по 11 человек вдоль каждой стороны крепости.

92. Из третьего условия вытекает, что в клетке должно быть размещено не менее 22 и не более 44 кроликов (сравните с решением задачи 91).

По четвертому условию общее число кроликов должно быть кратно 3. Значит, кроликов могло бы быть или 24, или 27, 30, 33, 36, 39, 42. Легко убедиться далее, что 24 кролика (16 и 8) невозможно разместить по 11 на каждой стороне клетки, чтобы при этом не оказалось пустых секций (первое условие). Если же взять 33, 36, 39 или 42 кролика, то и их можно разместить по 11 на каждой стороне клетки, но в каждом из этих случаев в некоторые секции пришлось бы помещать более чем 3 кролика (убедитесь и в этом!), что противоречило бы второму условию.

Таким образом, путем исключения мы приходим к выводу, что первоначально было намечено получить 30 кроликов и разместить их предполагали следующим образом (в квадратике — общее количество кроликов на каждом этаже):

2	3	3
3	20	2
3	2	2

План 2-го этажа

1	1	1
1	10	2
1	2	1

План 1-го этажа

Но институт получил на 3 кролика меньше, то есть 27 кроликов, которых можно разместить, например, следующим образом:

3	1	3
1	18	2
3	2	3

План 2-го этажа

2	1	1
1	9	1
1	1	1

План 1-го этажа

93. Решения задач 1, 2, 3, 4 представлены соответственно на рис. 255 *а*, *б*, *в* и *г*.

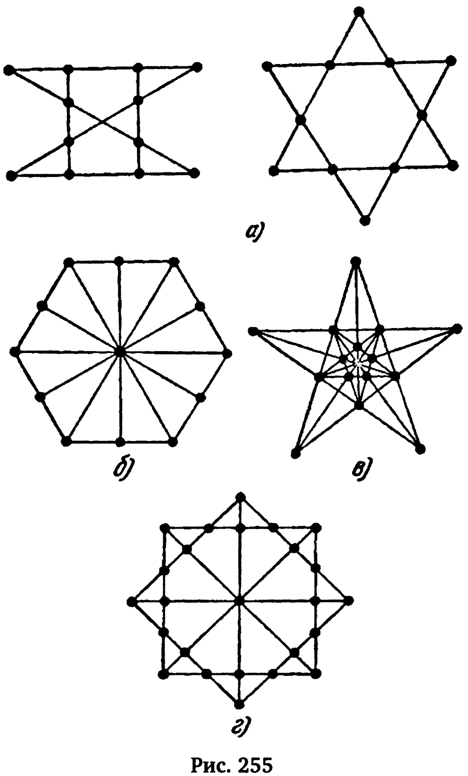


Рис. 255

94. Решение показано на рис. 256.

95. *Указание к решению задач первого варианта игр*. Любое из возможных решений задачи о перемещении 4 шашек (из 10, расположенных в 2 ряда) так, чтобы образовалось 5 рядов по 4 шашки в каждом, можно легко и быстро получить при помощи несложных геометрических построений. Замените шашки точками на листе бумаги и зачеркните какие-нибудь 3 верхние и 1 нижнюю точки. Первую из оставшихся 2 точек верхнего ряда соедините прямыми с какими-либо 2 точками нижнего ряда, а вторую точку верхнего ряда — с остальными 2 точками нижнего ряда (рис. 257).

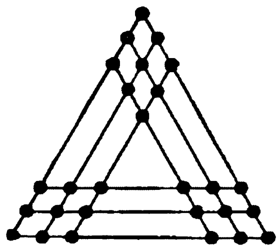


Рис. 256

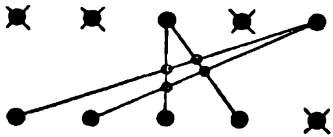


Рис. 257

Избегайте таких комбинаций точек, которые приводят к параллельным линиям, и тогда вы получите 4 точки пересечения проведенных линий. В этих точках пересечения и следует поместить 4 шашки, соответствующие зачеркнутым точкам.

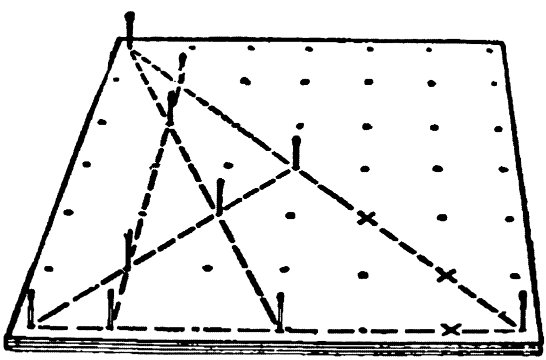


Рис. 258

Решение задачи о расположении спичек в отверстиях листа картона или пластилина (игра вторая) показано на рис. 258.

96. Наименьшее число ходов — 24; порядок их следования таков (всякий раз следует перемещать верхнюю шашку): 1) 1 – *A* (шашку № 1 переместить на кружок *A*); 2) 2 – *B* (шашку № 2 переместить на кружок *B*); и далее: 3) 3 – *C*; 4) 4 – *D*; 5) 2 – *D*; 6) 5 – *B*; 7) 3 – *B*; 8) 1 – *B*; 9) 6 – *C*; 10) 7 – *A*; 11) 1 – *A*; 12) 6 – *E*; 13) 3 – *C*; 14) 1 – *C*; 15) 5 – *A*; 16) 1 – *A*; 17) 3 – *A*; 18) 1 – *A*; 19) 6 – *C*; 20) 8 – *B*; 21) 6 – *B*; 22) 2 – *E* (или на *C*); 23) 4 – *B*; 24) 2 – *B*.

97. Наименьшее число обменов — 19.

Наиболее экономная система обменов состоит в том, чтобы укомплектование шашек вести цепочками, то есть, обменяв местами, например, шашки 1 и 7, поменять затем шашку 7 с той, которая занимает седьмое место, в данном примере — с шашкой 20. В свою очередь шашку 20 следует поменять с той, которая занимает ее место — с шашкой 16, а шашку 16 — с шашкой 11, которая незаконно расположилась на шестнадцатом месте и т. д. до завершения цепочки, когда обе обменивающиеся шашки попадут на свои законные места.

Тогда следует начать новую цепочку обменов и так до полного их завершения.

Все перемещения, необходимые для решения данной задачи, располагаются в следующие пять цепочек:

1 и 7; 7 и 20; 20 и 16; 16 и 11; 11 и 2; 2 и 24;
3 и 10; 10 и 23; 23 и 14; 14 и 18; 18 и 5;
4 и 19; 19 и 9; 9 и 22;
6 и 12; 12 и 15; 15 и 13; 13 и 25;
17 и 21.

Схему необходимых перемещений можно наметить заранее, если предварительно выписать подряд номера всех шашек в их первоначальном расположении, а под ними порядковые номера:

7 24 10 19 3 12 20 8 22 и т. д.
1 2 3 4 5 6 7 8 9 и т. д.

Вычеркиваем первую пару чисел 1 и 7; эти числа определяют первый обмен шашек, затем ищем 7 в нижнем ряду и замечаем над ним число 20; вычеркиваем числа 7 и 20; они определяют второй обмен шашек; ищем 20 в нижнем ряду, замечаем над ним 16; вычеркиваем числа 20 и 16; они определяют третий обмен соответствующих шашек и т. д.

Когда цепочка оборвется, начинаем составление ее следующего звена с самой крайней пары еще не зачеркнутых цифр слева.

В наихудшем случае могла бы образоваться одна цепочка; когда для размещения 25 шашек потребовалось бы 25 – 1 = 24 обмена (в последнем обмене сразу две шашки занимают надлежащие места).

В данной задаче пять цепочек, кроме того одна шашка (№ 8) уже в начальном положении занимает положенное ей место, поэтому для решения задачи необходимо и достаточно сделать 25 – 5 – 1 = 19 обменов.

98. Если, например, одну из девяти конфет внешней, самой большой коробочки переложить в самую маленькую, то в этой внутренней коробочке окажется 5 конфет, то есть 2 пары плюс 1 конфета, и эти 5 конфет нужно включить в число конфет, находящихся во второй внутренней коробочке.

Отсюда следует, что вторая внутренняя коробочка теперь содержит 5 + 4 = 9 конфет, то есть 4 пары плюс 1 конфету.

Рассуждая таким же образом, получим, что и третья внутренняя коробочка теперь содержит 9 + 4 = 13 конфет, то есть опять-таки число конфет, удовлетворяющее условию задачи, и т. д.

Найдите самостоятельно еще несколько иных распределений конфет по коробочкам.

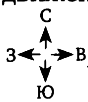
99. Все пешки можно снять в 16 ходов. Можно поставить коня так, чтобы первый удар нанести по пешке *c*2 затем по пешке *b*4 и далее *d*3: *b*2: *c*4: *d*2: *b*3: *d*4: *e*6: *g*7: *f*5: *e*7: *g*6: *e*5: *f*7: *g*5.

Первый удар можно нанести также по пешке *b*3 или по пешкам *f*7 и *g*6.

100. Первая головоломка. Условимся, что первая цифра показывает номер шашки, а вторая цифра (в отдельных случаях буква) указывает номер той клетки, куда ставится шашка. Тогда возможен следующий порядок перемещений.

2 – 1; 3 – 2; 4 – 3; 4 – *А*; 5 – 4; 5 – 3; 6 – 5; 6 – 4; 7 – 6; 7 – 5; 7-*Б*; 8 – 7; 8 – 6; 8 – 5; 9 – 8; 9 – 7; 9 – 6; 1 – 9; 1 – 8; 1 – 7; 1 – *В*; 9 – 7; 9 – 8; 9 – 9; 9 – 10; 8 – 6; 8 – 7; 8 – 8; 8 – 9; 7 – 5; 7 – 6; 7 – 7; 7 – 8; 1 – 7; 1 – 6; 1 – 5; 1-*Б*; 6 – 5; 6 – 6; 6 – 7; 6-*В*; 5 – 4; 5 – 5; 5 – 6; 5 – 7; 4 – 3; 4 – 4; 4 – 5; 4 – 6; 1 – 5; 1 – 4; 1 – 3; 1 – *А*.

Дальнейший порядок перемещений очевиден.

Вторая головоломка. Будем считать четыре возможных направления для движения шашек направлениями на север, юг, восток и запад: 

, тогда последовательность перемещений шашек можно записать так:

1) шаг на восток;
2) прыжок на запад;
3) шаг на запад;
4) прыжок на восток;
5) шаг на север;
6) прыжок на юг;
далее в сокращенной записи:
7) ш. Ю;
8) п. С;
9) п. В;
10) ш. З;
11) п. З;
12) ш. С;
13) ш. В;
14) п. З;
15) ш. Ю;
16) п. В;
17) ш. С;
18) п. Ю;
19) ш. В;
20) ш. С;
21) п. Ю;
22) ш. З;
23) п. С;
24) п. С;
25) ш. Ю;
26) п. Ю;
27) п. В;
28) ш. С;
29) п. Ю;
30) п. З;
31) п. С;
32) ш. В;
33) п. З;
34) п. С;
35) ш. В;
36) п. З;
37) п. Ю;
38) п. В;
39) п. В
40) ш. З;
41) п. З;
42) ш. В;
43) п. С;
44) ш. Ю;
45) п. Ю;
46) ш. С.

101.

$$\left.\begin{matrix}1\\8\\15\end{matrix}\right\} d=7 \qquad \left.\begin{matrix}2\\7\\12\end{matrix}\right\} d=5 \qquad \left.\begin{matrix}6\\10\\14\end{matrix}\right\} d=4$$

$$\left.\begin{matrix}9\\11\\13\end{matrix}\right\} d=2 \qquad \left.\begin{matrix}3\\4\\5\end{matrix}\right\} d=1$$

102. Задача имеет единственное решение. Оно представлено на рис. 259. Чтобы не блуждать в потемках при отыскании решения, можно воспользоваться следующим приемом: поместить звездочку во втором столбце клеток так низко, как это позволяет положение звездочки в первом столбце клеток, и в соответствии с условием: располагать звездочки только на белых клетках; в третьем столбце клеток следует поместить звездочку опять по возможности на самую низкую клетку и т. д., всегда стремясь поместить в следующем столбце звездочку настолько низко, насколько это позволяют звездочки, стоящие в предыдущих столбцах. Как только окажется, что в столбце нигде нельзя поместить очередную звездочку, следует поднять звездочку в предыдущем столбце на минимально возможное число клеток (но ставить звездочку всегда только в соответствии с условием задачи); если же поднимать ее больше некуда, то снять совсем и поднимать теперь опять предыдущую звездочку и т. д., продолжая размещать остальные звездочки, каждый раз руководствуясь принятым правилом: поднимать поставленные звездочки выше только в том случае, если справа совсем нет места для очередной звездочки.

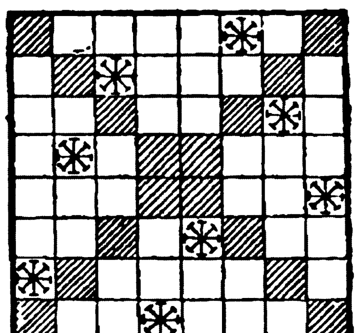


Рис. 259

Такой процесс проб, может быть, займет немало времени, но зато он систематичен и непременно приведет к цели.

103. Первая задача. Положим, что буквы одинаковы. Поместим одну букву в какой-нибудь клетке диагонали AC, например в левом верхнем углу (рис. 260). Среди клеток второй диагонали BD есть одна клетка, стоящая в том же горизонтальном ряду, где поставлена первая буква, и одна клетка в том же вертикальном ряду; в одной из остальных двух клеток второй диагонали можно поставить вторую букву.

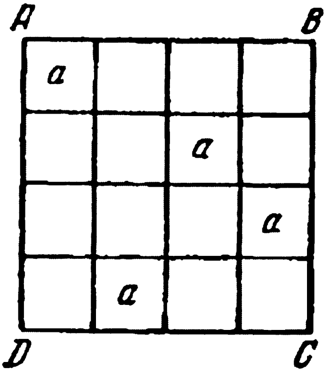


Рис. 260

Легко убедиться в том, что после того, как две буквы поставлены, местоположение остальных двух букв определяется однозначно, то есть в каждом из не занятых буквами горизонтальных рядов есть только по одной клетке, куда можно в соответствии с условием задачи поместить остальные буквы.

Теперь нетрудно подсчитать количество возможных решений. Для каждого из четырех возможных расположений первой буквы в одной из клеток диагонали AC имеется два возможных расположения второй буквы по диагонали BD, то есть всего $4 \times 2 = 8$ случаев. Все 8 решений можно получить из одного путем поворачивания и переворачивания (другими словами, путем отражения в зеркале) квадрата.

Положим теперь, что данные 4 буквы различны: a, b, c, d и размещены вместо букв a в те же клетки, как на рис. 260, в каком-нибудь порядке, например в таком: a, b, c, d. Но в эти же клетки можно поместить буквы в другом порядке, например в таком: b, c, d, a. Так можно менять порядок расположения букв, не меняя занятых клеток, 24 раза. Все это будут различные решения. Всего различных решений будет: $8 \times 24 = 192$.

Вторая задача. Из условия задачи следует, что буквы, стоящие в угловых клетках, должны быть различны. Поэтому прежде всего поставим в произвольном порядке четыре буквы в угловые клетки (рис. 261, *а*). В средних клетках диагонали, содержащей буквы a и d, должны стоять буквы b и c, но они могут быть поставлены двумя способами (рис. 261, *б* и *в*).

a			b
c			d

а)

a			b
	b		
		c	
c			d

б)

a			b
	c		
		b	
c			d

в)

Рис. 261

После того как указанные шесть клеток заполнены, остальные клетки в соответствии с условием могут быть заполнены единственным образом. Для этого прежде всего следует расставить буквы в крайних горизонтальных и вертикальных рядах, а потом во второй диагонали. Окончательное расположение показано на рис. 262.

Итак, если расставлены буквы в угловых клетках, то задача имеет два решения. Но так как четыре буквы в угловых клетках можно размещать 24 способами, то задача имеет $24 \times 2 = 48$ решений.

Из одного найденного расположения путем поворачивания и переворачивания (то есть путем зеркального отражения) заполненного квадрата получается еще 7 расположений.

a	c	d	b
d	b	a	c
b	d	c	a
c	a	b	d

a	d	c	b
b	c	d	a
d	a	b	c
c	b	a	d

Рис. 262

Если условиться считать все расположения, полученные из одного путем поворачиваний и переворачиваний за одно решение, то при этом условии задача имеет 48 : 8 = 6 различных решений.

104. После ряда попыток вам, несомненно, удалось найти какое-нибудь из возможных многочисленных решений этой задачи. Возможно и такое решение, которое представлено на таблице.

1 красная	**4 черная**	**2 зеленая**	**3 белая**
2 белая	**3 зеленая**	**1 черная**	**4 красная**
3 черная	**2 красная**	**4 белая**	**1 зеленая**
4 зеленая	**1 белая**	**3 красная**	**2 черная**

Прийти к этому решению можно путем следующих рассуждений. Обозначим через A, B, C и D названия окрасок квадратов, а через a, b, c и d — цифры 1, 2, 3, 4. Задача сводится к тому, чтобы в 16 клетках квадрата разместить 4 прописные буквы A, B, C и D так, чтобы все 4 находились в каждом горизонтальном и вертикальном рядах, в каждой диагонали и нигде не повторялись; то же самое сделать и со строчными буквами a, b, c и d, комбинируя их с прописными буквами всеми возможными способами. Расположим сначала прописные буквы, пользуясь, например, таким приемом: в первой горизонтали поместим их в алфавитном порядке (рис. 263, *а*), а затем заполним клетки диагонали, идущей из левого верхнего угла квадрата в правый нижний. Вдоль диагонали можно получить только два расположения: или последовательно, как A, C, D, B, или как A, D, B, C. Примем первое расположение. Остальные клетки можно заполнить теперь только единственным образом. Получим расположение, изображенное на рис. 263, *а*. Чтобы разместить строчные буквы, приставим к каждой диагональной букве A, *C*, *D*, *B* по строчной букве того же наименования (рис. 263, *б*), а затем будем брать каждую клетку и около прописной буквы ставить строчную, одноименную с прописной буквой другой клетки, расположенной симметрично относительно заполненной диагонали. Получим расположение, изображенное на рис. 263, *б*.

A	B	C	D
D	C	B	A
B	A	D	C
C	D	A	B

а)

Aa	Bd	Cb	Dc
Db	Cc	Ba	Ad
Bc	Ab	Dd	Ca
Cd	Da	Ac	Bb

б)

Рис. 263

Если заменим теперь *A*, *B*, *C* и *D* соответственно красным, черным, зеленым и белым квадратами, а буквам *a*, *b*, *c* и *d* придадим значения 1, 2, 3 и 4, то получим схему, приведенную в начале решения этой задачи. Прописные буквы можно заменить цветными квадратами той же окраски, но в другом чередовании красок. Имея 4 цвета, мы можем разместить их взамен букв *A*, *B*, *C* и *D* 24 различными способами; точно так же 4 строчные буквы можно заменить цифрами 1, 2, 3, 4 тоже 24 способами, так что всего можно получить $24 \times 24 = 576$ различных решений этой задачи.

105. Пусть первоначально оставлен свободным кружок № 1. Каждый ход можно записать при помощи двух цифр: первая покажет номер кружка, с которого начинается ход, а вторая — номер кружка, на котором заканчивается ход. Тогда возможно следующее решение: 9–1; 7–9; 10–8; 21–7; 7–9; 22–8; 8–10; 6–4; 1–9; 18–6; 3–11; 16–18; 18–6; 30–18; 27–25; 24–26; 28–30; 33–25; 18–30; 31–33; 33–25; 26–24; 20–18; 23–25; 25–11; 6–18; 9–11; 18–6; 13–11; 11–3; 3–1.

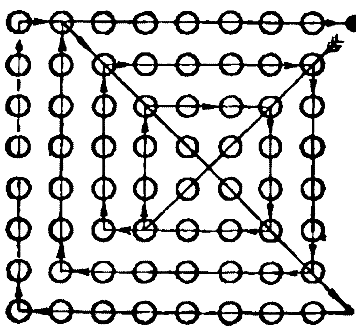
106. Таблица всех 24 решений головоломки:

1. 1–2, 3	2–6, 5	6–1, 3	1–6, 2
2. 1–2, 3	4–1, 3	3–6, 5	5–3, 4
3. 1–4, 5	3–4, 1	4–2, 6	2–3, 4
4. 1–4, 5	5–2, 6	6–4, 1	1–6, 5
5. 2–3, 4	3–1, 6, 5	6–2, 4	2–1, 6
6. 2–3, 4	5–2, 3	3–1, 6	1–3, 5
7. 2–4, 5	5–1, 3, 6	6–2, 4	2–1, 6
8. 2–4, 5	3–2, 5	5–1, 6	1–5, 3
9. 3–1, 2	5–3, 2	2–6, 4	4–5, 2
10. 3–1, 2	4–3, 1	1–6, 5	5–1, 4
11. 3–1, 2	1–2, 6, 4	6–2, 3	3–6, 5
12. 3–1, 2	2–1, 6, 5	6–3, 1	3–6, 4
13. 3–4, 5	2–3, 5	5–1, 6	1–2, 5
14. 3–4, 5	1–3, 4	4–2, 6	2–1, 4
15. 3–4, 5	4–1, 6, 5	6–5, 3	3–2, 6
16. 3–4, 5	5–2, 6, 4	6–3, 4	3–1, 6
17. 4–3, 2	3–1, 6, 5	6–2, 4	4–5, 6
18. 4–3, 2	1–4, 3	3–5, 6	5–3, 1
19. 4–1, 2	1–3, 6, 5	6–2, 4	4–6, 5
20. 4–1, 2	3–1, 4	1–6, 5	5–1, 3
21. 5–3, 4	4–1, 6	6–3, 5	5–6, 4
22. 5–3, 4	2–3, 5	3–1, 6	1–2, 3
23. 5–1, 2	3–2, 5	2–6, 4	4–3, 2
24. 5–1, 2	1–4, 6	6–2, 5	5–1, 6

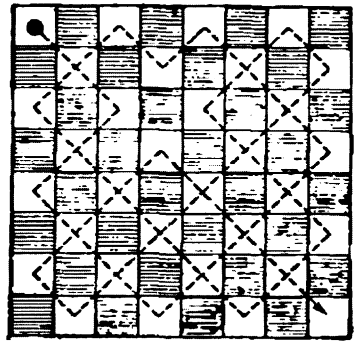
107. Маршруты девочки и мальчика представлены соответственно схемами *а* и *б* рис. 264.

108. Ход коня таков, что с черного поля он переходит на белое, затем с белого снова на черное и т.д. Шахматная доска содержит 64 клетки. Чтобы попасть в правый верхний угол (на поле *h*8), побывав на каждой клетке доски по одному разу, конь должен сделать 63 хода.

В начальном положении конь стоит на черном поле (см. рис. 58) и прийти, по условию, должен тоже на черное поле (*h*8).



а)



б)

Рис. 264

Это невозможно, так как 63-й ход нечетный, а всяким нечетным ходом конь, занимавший первоначально черное поле, переходит на белое поле.

109. Маршрут, найденный узником, показан на рис. 265

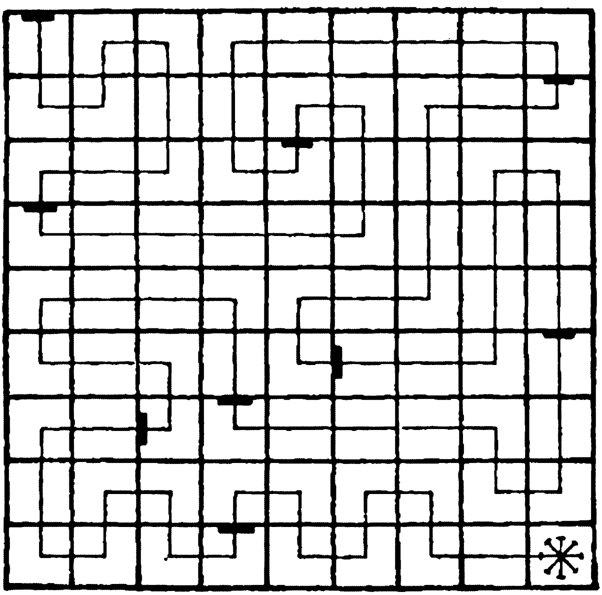


Рис. 265

110. Сначала узник должен пойти так, чтобы взять ключи *г* и *д* и открыть ими двери камер *Д* и *Г* (см. рис. 60), потом ему следует достать ключ *в*, открыть им дверь камеры *В*, взять ключ *а*, который даст возможность пройти через камеру *А* и взять ключ *б*. Необходимо теперь еще раз пройти через *Д* и *Г*, достигнуть *Б*, взять ключ *б* снова пройти *Д*, открыть дверь камеры *Е*, взять ключ *ж* и выйти из подземелья через дверь *Ж*.

Путь к свободе был нелегок — через 84 двери.

К главе III

111. а) См. рис. 266; б) см. рис. 267; в) см. рис. 268; г) см. рис. 269; д) см. рис. 270.

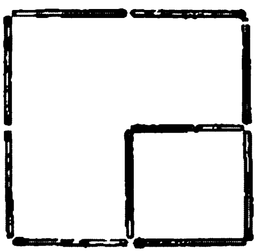


Рис. 266

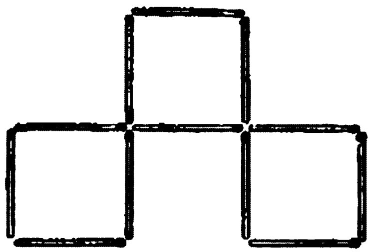


Рис. 267

112. а) Вынуть 12 спичек, расположенных внутри большого квадрата, и сложить их в новый такой же квадрат;

б) см. рис. 271;

в) см. рис. 272, *а* (если отобрать 4 спички); см. рис. 272, *б* (если отобрать 6 спичек); см. рис. 272, *в* (если отобрать 8 спичек);

г) см. рис. 273;

д) см. рис. 274;

е) см. рис. 275;

ж) см. рис. 276;

з) см. рис. 277.

113. См. рис. 278.

114. См. рис. 279.

115. См. рис. 280.

116. См. рис. 281.

117. См. рис. 282.

118. 2 спички надломить посредине (рис. 283).

119. См. рис. 284.

120. См. рис. 285.

121. См. рис. 286.

122. См. рис. 287.

123. Положите 2 спички на край стола или книги так, чтобы края стола или книги образовали две другие стороны квадрата.

124. а) См. рис. 288, *а*; б) см. рис. 288, *б*.

125. См. рис. 289.

126. См. рис. 290.

127. См. рис. 291.

128. а) См. рис. 292; б) см. рис. 293.

129. 840.

130. См. рис. 294. Возможны и другие решения.

131. *Первое решение*. Из 12 спичек следует сначала сложить прямоугольный треугольник с катетами в 3 и 4 спички и гипотенузой в 5 спичек (рис. 295). Площадь такого треугольника будет содержать $\frac{1}{2} \times (3 \times 4) = 6$ квадратных единиц.

Если затем снять 4 спички, образующие прямой угол, и переложить их ступеньками (как показано на рис. 295), то площадь треугольника убавится на 3 квадратные единицы. Получившаяся фигура (заштрихованная на рисунке) и будет содержать $6 - 3 = 3$ квадратные единицы.

Второе решение. Можно построить квадрат, содержащий 4 квадратные единицы (рис. 296), превратив его в равновеликую фигуру, и, вынув из нее один квадрат, получить фигуру, площадь которой 3 квадратные единицы.

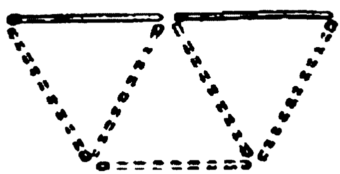


Рис. 297

132. Две спички, лежащие на одной прямой, составляют между собой угол в 180°. Чтобы получить такой угол, строим на спичках три равносторонних треугольника с общей вершиной (рис. 297). Сумма углов при общей вершине как раз и составит 180°, так как $60° \times 3 = 180°$.

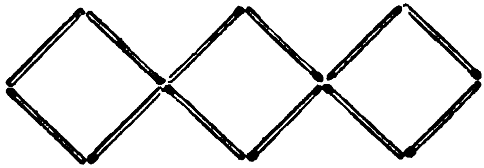


Рис. 268

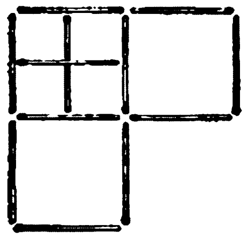


Рис. 269

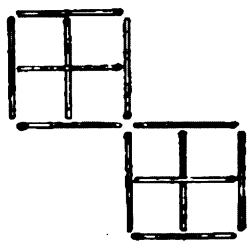


Рис. 270

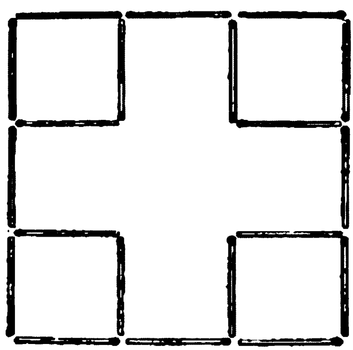
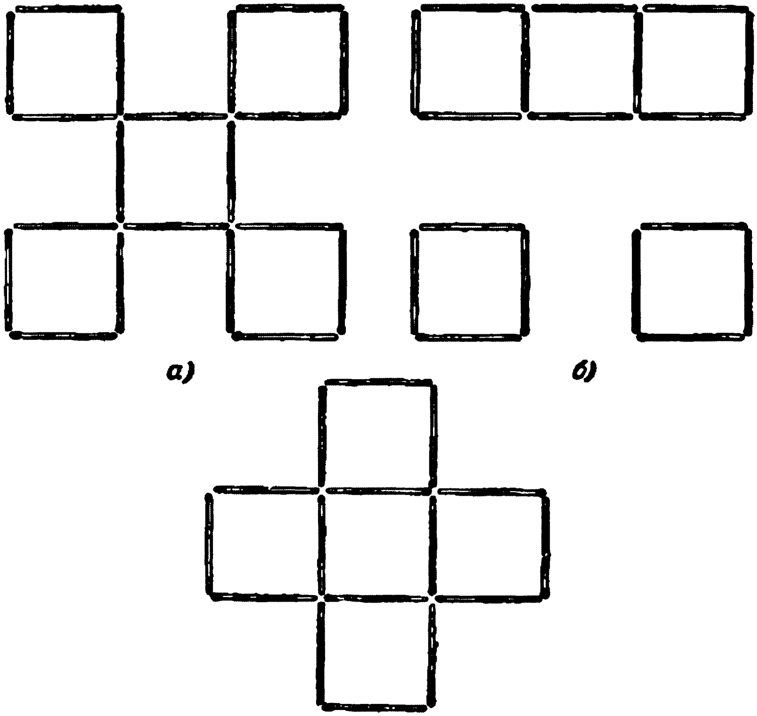


Рис. 271



а) б) в)

Рис. 272

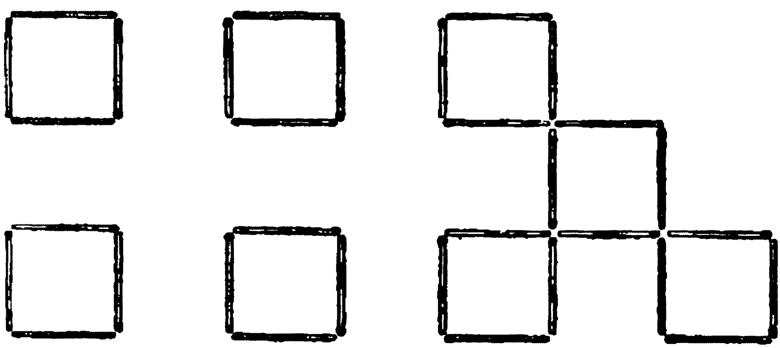


Рис. 273

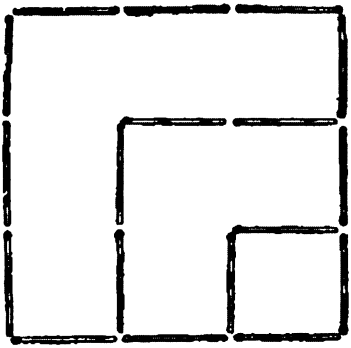


Рис. 274

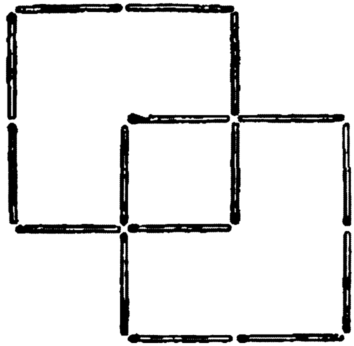


Рис. 276

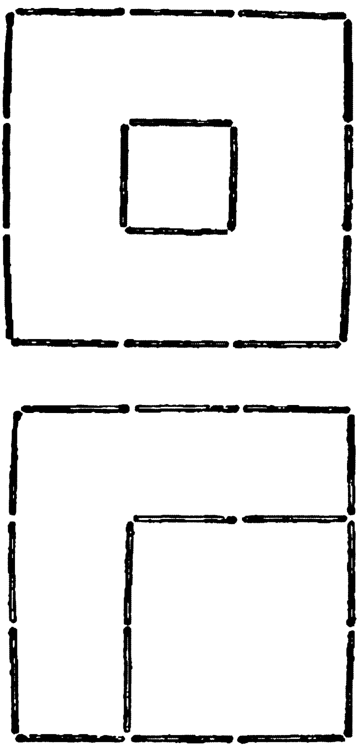


Рис. 275

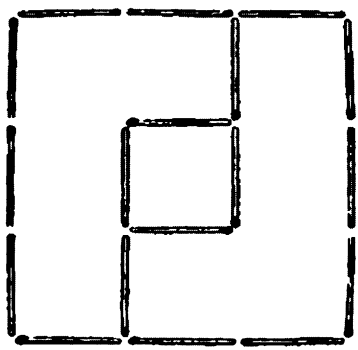


Рис. 277

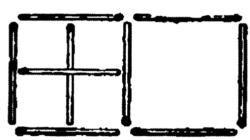


Рис. 278

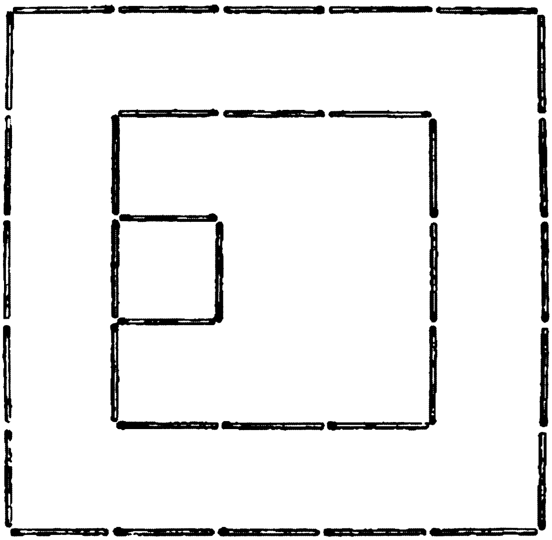


Рис. 279

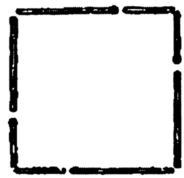


Рис. 283

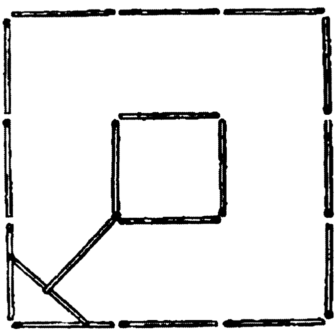


Рис. 280

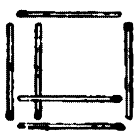


Рис. 281

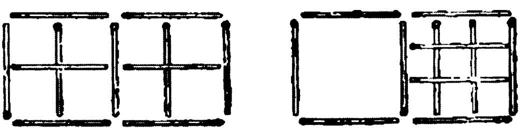


Рис. 282

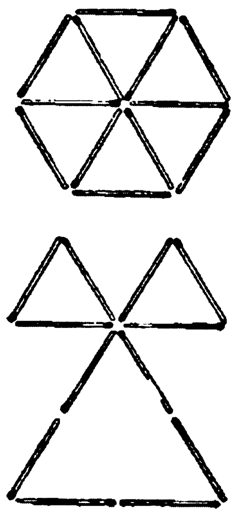


Рис. 284

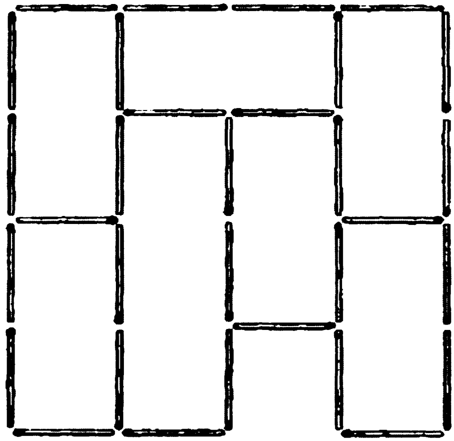


Рис. 285

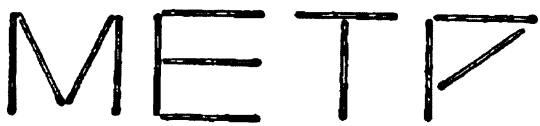


Рис. 286

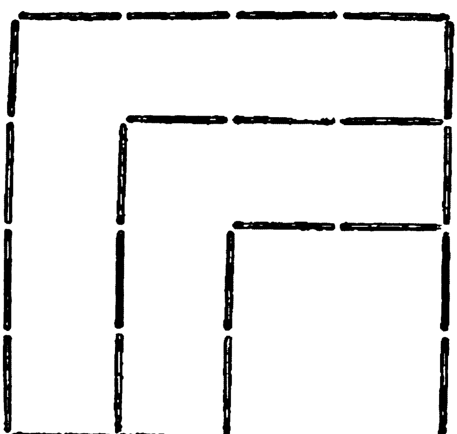
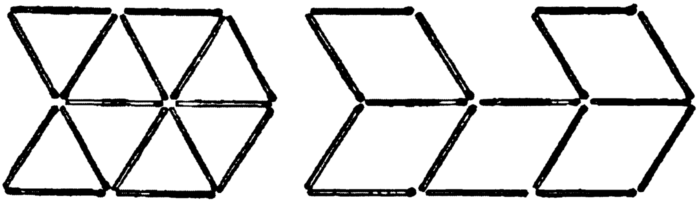
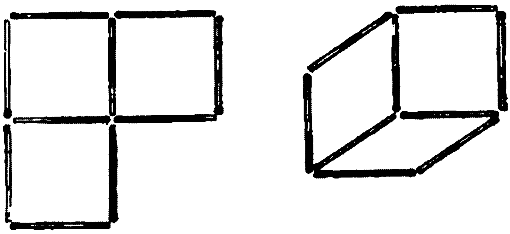


Рис. 287



а)　　　　　　　　　б)

Рис. 288



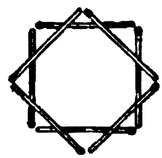


Рис. 289　　　　　　Рис. 290

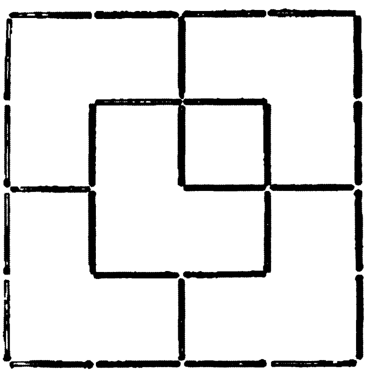


Рис. 291

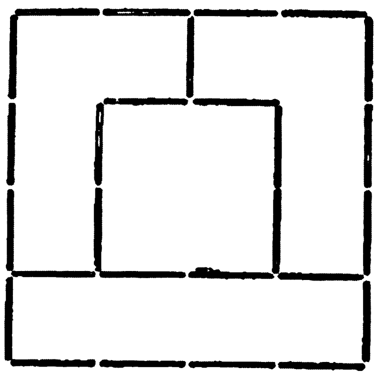


Рис. 292

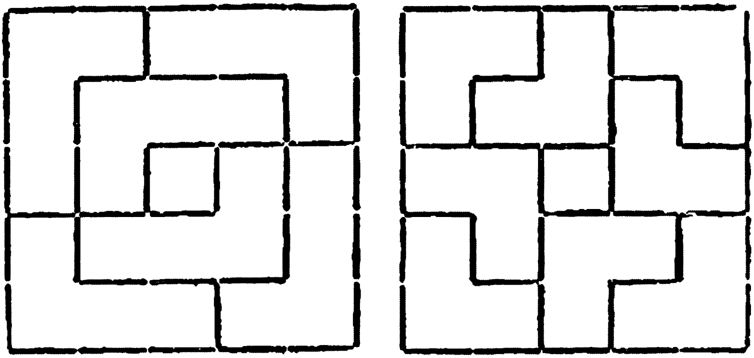


Рис. 293

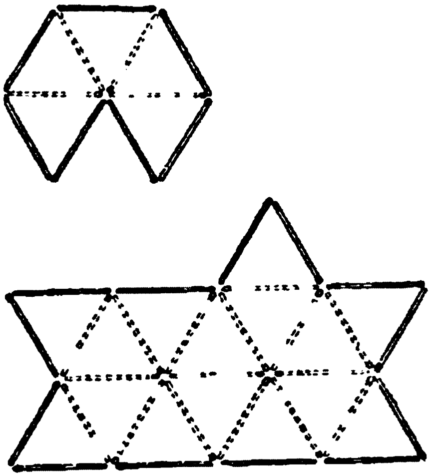


Рис. 294

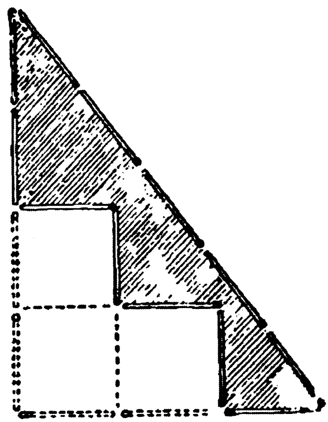


Рис. 295

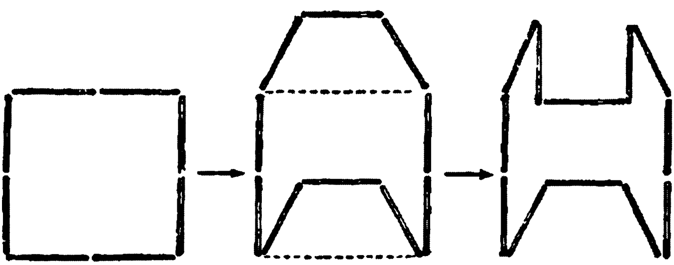


Рис. 296

133. Строим 6 равносторонних треугольников с одной общей вершиной (рис. 298). Все внутренние спички удаляем. Оставшаяся фигура — правильный шестиугольник, так как каждая сторона фигуры равна радиусу описанного круга, а таким свойством обладает только правильный шестиугольник.

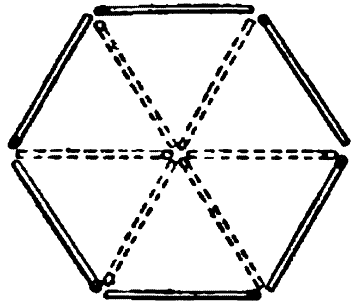


Рис. 298

К главе IV

134. 1. Линии разреза показаны на рис. 299. Если все построения и разрезы выполнены аккуратно, то проверить равенство получившихся частей можно наложением.

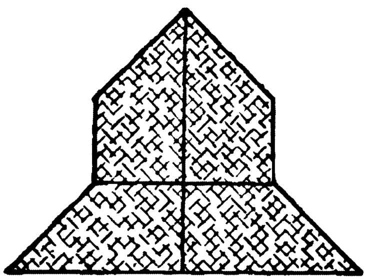


Рис. 299

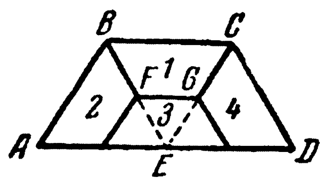


Рис. 300

2. Трапецию *ABCD* (рис. 300) нужно разрезать по ломаной, соединяющей середины отрезков *AE*, *BE*, *CE* и *DE*, и по линиям *BF* и *CG*. Получится 4 равные трапеции.

Проверить можно наложением, а знающие геометрию могут провести обычное математическое доказательство. Это нетрудно.

3. Линии разреза показаны на рис. 301.

4. Чтобы получить необходимые линии разреза правильного шестиугольника *ABCDEF* (рис. 302), нужно соединить середины его сторон с серединами радиусов *OA*, *OB*, *OC*, *OE* и *OF*. Каждая часть шестиугольника будет ромбом (можете проверить это или доказать), а ромб хотя и имеет равные стороны, но не будет правильным четырехугольником, так как не все его углы равны между собой.

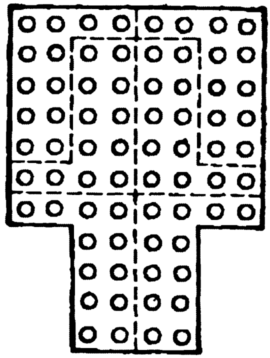


Рис. 301

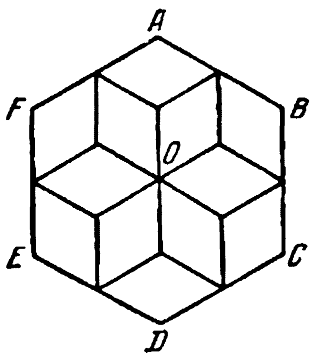


Рис. 302

5. Решение показано на рис. 303.

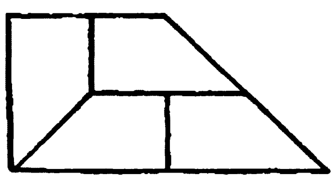


Рис. 303

135. Решение показано на рис. 304.

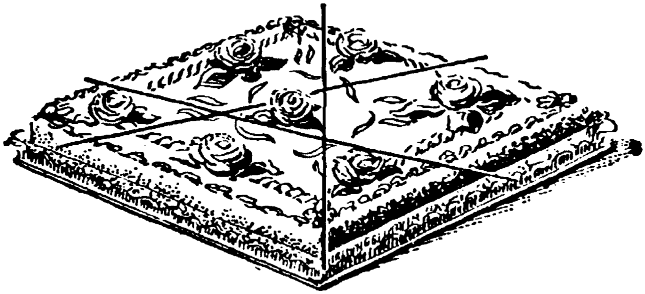


Рис. 304

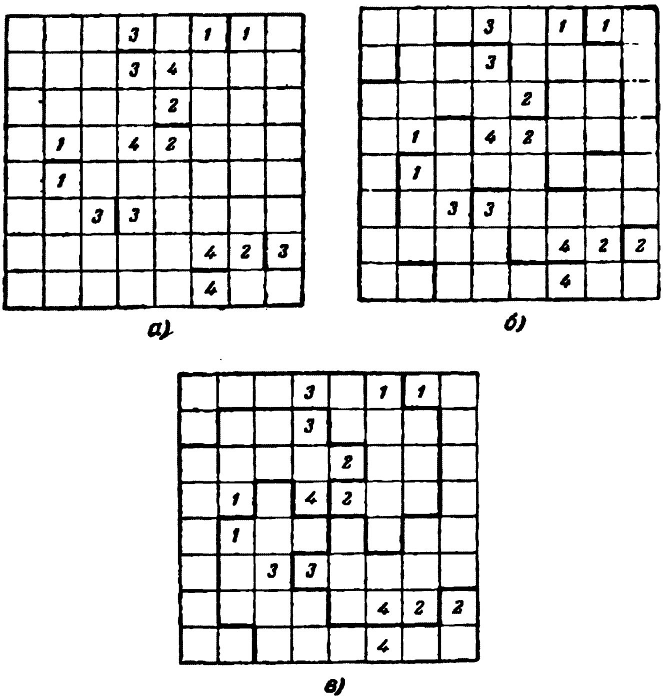


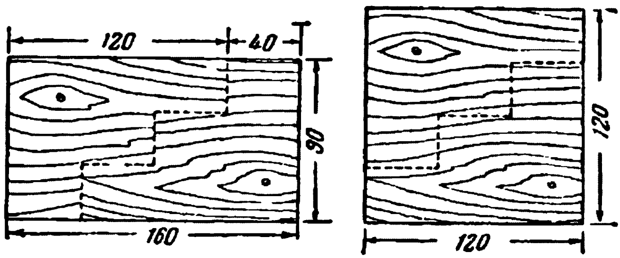
Рис. 305

136. Линии разреза будем восстанавливать последовательно (рис. 305):

а) намечаем разрезы между одинаковыми рядом стоящими цифрами (рис. 305, *а*);

б) в соответствии с заданной симметрией (совпадение очертаний фигур при повороте на 90°) каждый такой разрез воспроизводим еще в трех местах квадрата (рис. 305, *б*);

в) разъединим 4 центральные клетки, так как никакие две из них не могут принадлежать одной фигуре, и заканчиваем восстановление контура каждой фигуры, учитывая, что все угловые клетки также должны принадлежать разным фигурам и что в каждой фигуре должны содержаться по одному разу все цифры комплекта 1, 2, 3, 4 (рис. 305, *в*).



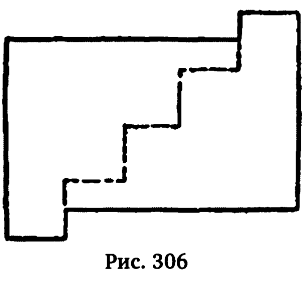


Рис. 306

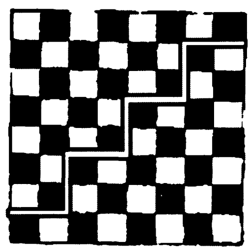


Рис. 307

137. Вася догадался сделать ступенчатый разрез (рис. 306) прямоугольного листа фанеры.

Следует заметить, что способ ступенчатого разреза для геометрически точного перекраивания прямоугольника в квадрат пригоден не всегда.

Но так или иначе в квадрат можно перекроить любой прямоугольник.

138. Линия разреза показана на рис. 307.

139. Данную фигуру нужно разрезать по линии *abcde* (рис. 308, *а*), где *b*, *c* и *d* — центры квадратов, составляющих данную фигуру.

Приложив отрезанную часть к оставшейся, как показано на рис. 308, *б*, получим искомую рамку.

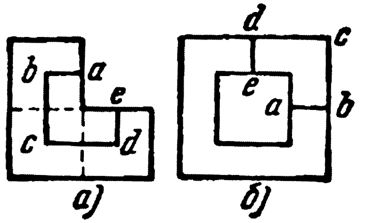


Рис. 308

При том же условии задачи найдите иную линию разреза.

140. Здесь нельзя ограничиться схематическим изображением подковы в виде дуги (рис. 309). Если не придадите фигуре подковы необходимой объемности, то, сколько ни старайтесь, вам не удастся разрезать ее вдоль 2 прямых линий больше чем на 5 частей.

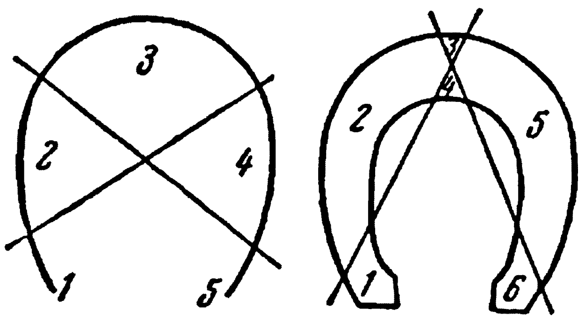


Рис. 309

На том же рисунке дано изображение подковы, более соответствующее действительности, и показано возможное деление ее на 6 частей.

141. Читатель должен обратить внимание на то, что в условии этой задачи, в отличие от условия предыдущей, отсутствует запрещение передвигать части после каждого разреза.

В этом и заключается весь секрет решения.

Первым разрезом следует отделить часть подковы с отверстиями *А* и *Г* (см. рис. 91).

Подкова при этом распадется на 3 части.

Приложим теперь получившиеся после первого разреза части друг к другу так, чтобы отверстия *Б*, *А* и *Д* оказались примерно на одной прямой линии, а *В*, *Г* и *Е* — на другой, и тогда вторым разрезом легко разделить подкову на требуемые 6 частей.

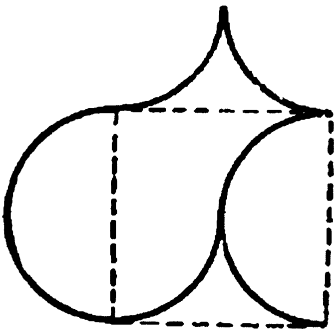


Рис. 310

142. Решение показано на рис. 310.

143. Решение представлено на рис. 311. Линии разрезом показаны пунктиром. Равные части обозначены одинаковыми цифрами.

Для нанесения линии разреза *MN* отложите на стороне *AB* отрезок *AM* = *KL* и проведите прямую

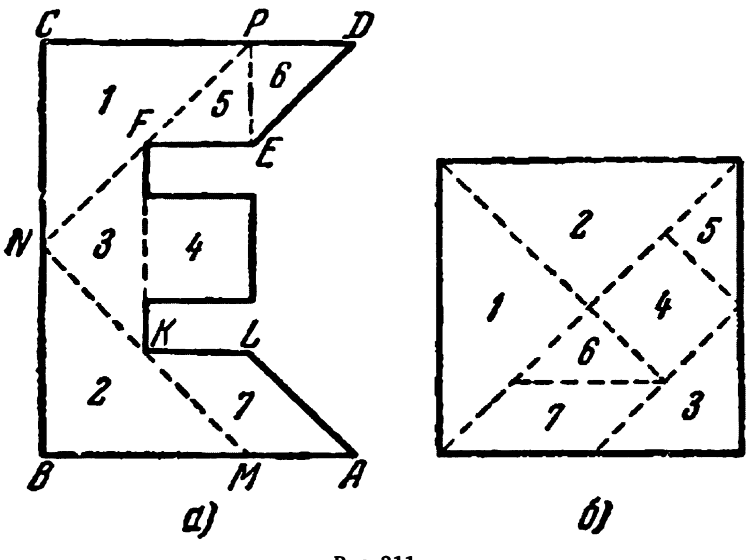


Рис. 311

через точки *M* и *K*. Для нанесения линии разреза *NP* проведите прямую через точки *N* и *F*. Построение остальных линий разреза ясно из чертежа. Если фигура была вычерчена правильно, то угол *MNP* окажется прямым, а отрезки *MB*, *BN*, *NC* и *CP* — равными.

144. Решение показано на рис. 312.

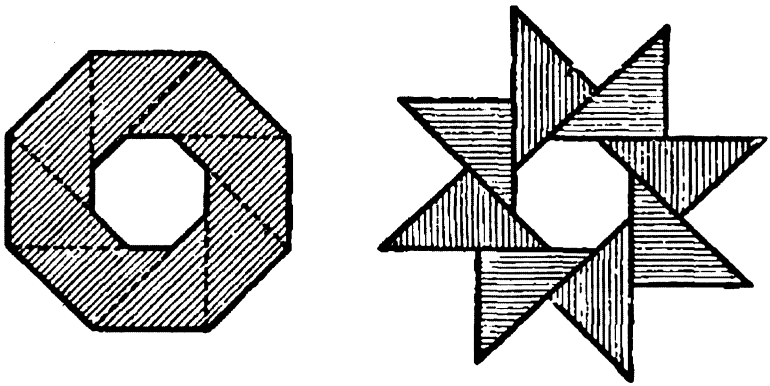


Рис. 312

145. Для доказательства невозможности выкроить из шахматной доски 15 фигур вида *а*) и одной — вида *б*) (рис. 313) рассмотрим такую же доску 8 × 8, но с другой последовательностью черных и белых клеток (рис. 313, *в*). Из какой бы части этой доски мы ни вырезали фигуру *а*), она будет содержать нечетное число белых и нечетное число черных клеток; 15 фигур *а*) также будут содержать по нечетному числу белых и черных клеток. Фигура *б*), наоборот, содержит по четному числу белых и черных клеток. Все 16 указанных фигур, таким образом, будут содержать по *нечетному* числу белых и черных квадратов; в то время как наша доска имеет по *четному* числу белых и черных клеток. Отсюда и следует невозможность решения задачи.

Одно из возможных решений дополнительной задачи представлено на рис. 313, *г*. Сплошные линии — линии разреза.

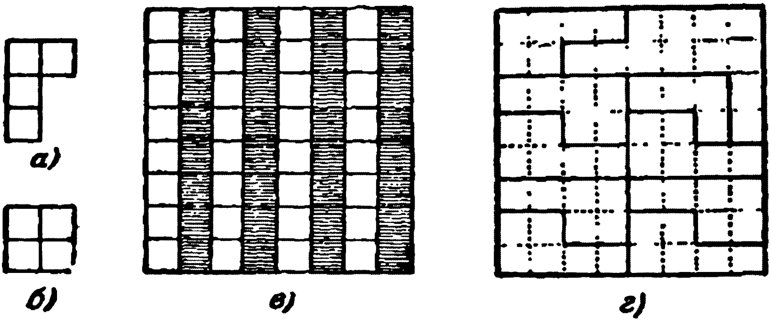


Рис. 313

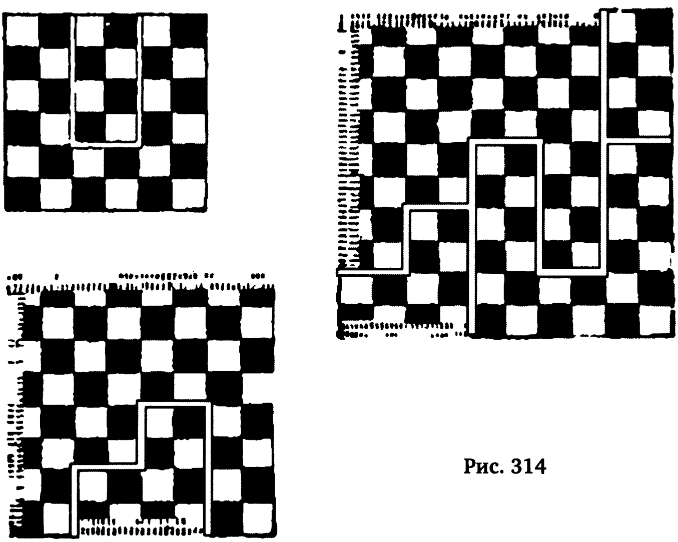


Рис. 314

146. Схема решения показана на рис. 314. Узкая светлая полоска — линия разреза; клетки, обработанные девочкой, заштрихованы.

147. Сначала столяр заметил, что выкройка доски представляет собой симметричную фигуру с двумя осями симметрии. Затем он обнаружил, что если половину продольной оси отверстия (*OA* на рис. 315) отложить на поперечной оси ($OO_1 = OA$ и $OO_2 = OA$) и соединить прямыми точки O_1 и *A*, а также O_2

и A, то каждая из фигур BO_1B_1 и CO_2C_1 будет в точности составлять четверть круга с радиусом O_1B, а каждая из фигур ABC и $A_1B_1C_1$ — четверть круга с радиусом A_1B_1, который равен половине радиуса O_1B_1.

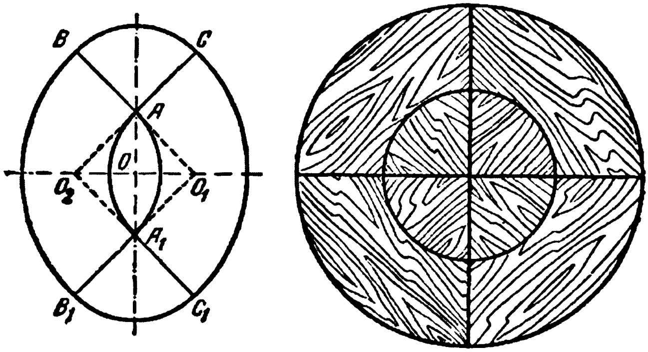


Рис. 315

Столяр распилил каждую доску по линиям BA, CA, B_1A_1 и C_1A_1 и из полученных 8 частей склеил аккуратную круглую крышку для стола, как показано на рис. 315.

148. На рис. 316 жирной чертой показаны линии разреза, удовлетворяющие условию задачи. Каждая часть по форме напоминает букву C. Одна из частей для наглядности заштрихована.

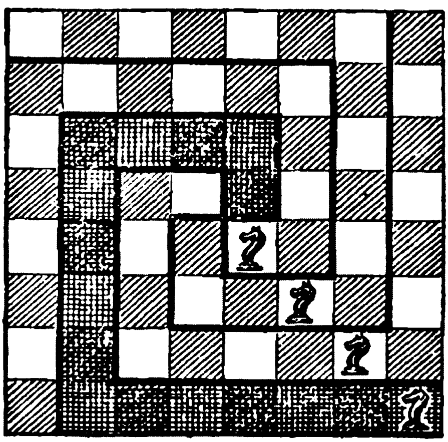


Рис. 316

149. Для достижения наибольшего числа делений нужно так проводить прямые линии, чтобы каждая из них пересекалась со всеми остальными, причем в одной точке не должно пересекаться более двух линий.

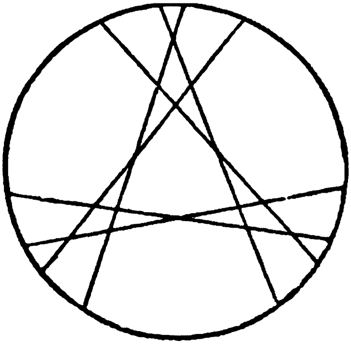


Рис. 317

Одно из возможных решений показано на рис. 317; расположение линий красивое, симметричное. Получилось 22 части.

150. Способ разрезания аналогичен тому, который применялся в тексте задачи. Найдем середину AC (рис. 318). Пусть это будет точка K. Отложим $FQ = AK$ на стороне AF и $DP = AK$ на продолжении CD.

Разрежем теперь фигуру по прямым линиям HQ и QE. Из полученных частей составляется квадрат $BPEQ$. Знающие геометрию обдумают доказательство.

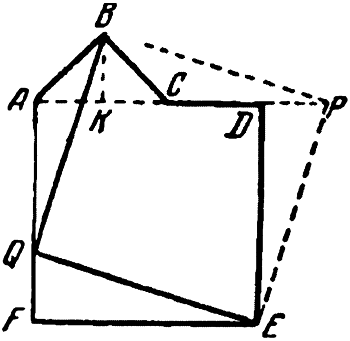


Рис. 318

Замечание. Способ решения не изменится, если треугольный выступ ABC окажется настолько большим, что точка C сольется с вершиной квадрата D, или даже если AC будет больше стороны квадрата AD, но меньше, чем $2AD$, лишь бы только треугольник ABC был равнобедренным и прямоугольным.

151. Дан правильный шестиугольник $ABCDEF$ (рис. 319). Для превращения его в правильный треугольник выполним ряд построений в следующей последовательности: проводим AC, затем $BK \perp AC$, $EL \perp AF$, $LM = LE$; проводим EM; строим равносторонний треугольник EMN со стороной EM и, наконец, проводим KP как продолжение KN до пересечения с CD в точке P.

Для контроля заметьте, что если все построения были выполнены тщательно, то окажется $CP = CK$.

Линии разреза на рис. 319, *а* изображены сплошными, а вспомогательные линии — пунктиром. Получается всего 6 частей. На рис. 319, *б* показано, как из этих частей составить равносторонний треугольник.

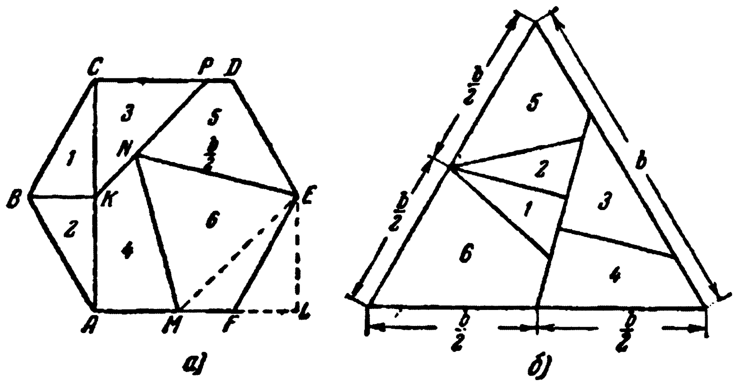


Рис. 319

Перерисуйте шестиугольник на плотную бумагу или картон и разрежьте на указанные части. У вас будет головоломка для друзей: из данных частей составить либо правильный шестиугольник, либо правильный треугольник.

По решениям-рисункам желающий проникнуть в сущность задачи может легко доказать правильность построений.

К главе V

152. 1) 6 разрезов; 2) 27 кубиков; 3) ни одного; 4) 8 — столько, сколько вершин у куба; 5) 12 — столько, сколько ребер у куба; 6) 6 — столько, сколько граней у куба; 7) 1.

153. Чтобы разойтись, поезда с паровозами *А* и *Б* должны проделать такие маневры (см. рис. 320).

а) Паровоз *Б* вместе с вагонами проходит за стрелку влево, заводит на ветку 40 вагонов, а с остальными возвращается назад.

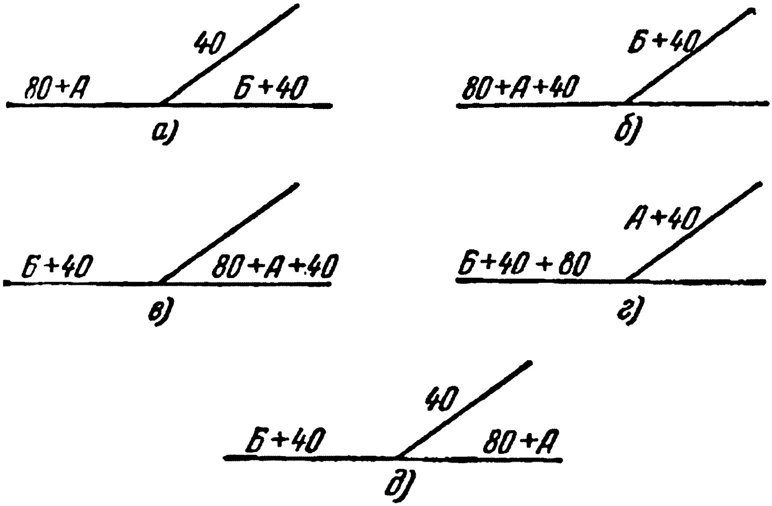


Рис. 320

б) Паровоз *А* уводит с ветки эти 40 вагонов; освободившееся место на ветке занимает паровоз *Б* с 40 вагонами.

в) Паровоз *А* ведет 40 вагонов впереди себя и 80 вагонов сзади по свободному пути за стрелку вправо, а паровоз *Б* с 40 вагонами переходит с ветки на основной путь влево.

г) Паровоз *А* (который теперь находится справа) вместе со всеми 120 вагонами проходит за стрелку влево, оставляет там свои 80 вагонов и заводит на ветку 40 вагонов, принадлежащих второму поезду.

д) С ветки паровоз *А* возвращается к своим вагонам, забирает их и идет своим путем — направо.

Паровоз *Б* вместе с 40 вагонами подходит к ветке, прицепляет находящиеся там остальные 40 вагонов и благополучно следует налево.

154. Решение задачи, осуществленное машинистом, можно представить в виде следующей схемы (рис. 321), при описании которой белый и черный вагоны будем обозначать соответственно буквами «*б*» и «*ч*», а паровоз — буквой «*п*».

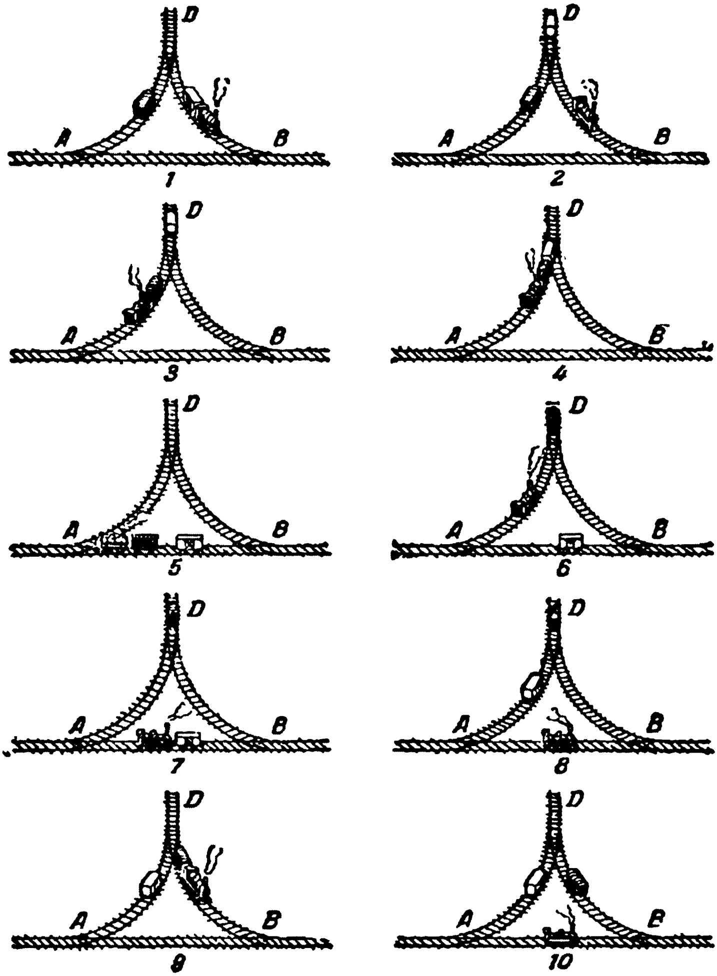


Рис. 321

1) Паровоз переходит на *BD*, прицепляет вагон «*б*» и идет с ним к тупику *D*;

2) заводит вагон «*б*» в тупик *D*, оставляет его там и идет на *BA*;

3) переходит по *BA* на *AD*, прицепляет вагон «*ч*» и вместе с ним идет к тупику *D*;

4) прицепляет вагон «*б*» и идет с вагонами «*ч*» и «*б*» на *AB*;

5) оставляет на *AB* вагон «*б*» и идет с «*ч*» на *AD*;

6) заводит «*ч*» в тупик *D*, оставляет его там и идет на *AB*;

7) прицепляет вагон «*б*» и идет с ним на *AD*;

8) оставляет «*б*» на *AD* и переходит по *AB* на *BD*;

9) прицепляет «*ч*» и выводит его на *DB*;

10) оставляет «*ч*» на *DB* и возвращается на свое прежнее место на *AB*.

Самостоятельно найдите другие решения. Мне, например, известны еще два способа решения задачи в 10 ходов.

Решение задачи в 6 ходов (рис. 322).

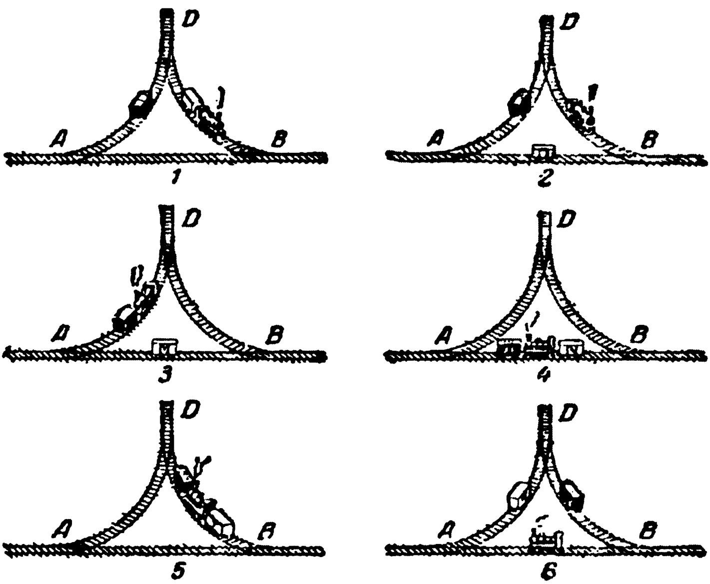


Рис. 322

1) Паровоз переходит на *BD*, прицепляет вагон «*б*» и идет с ним на *AB*;

2) оставляет «*б*» на *AB* и идет на *AD* через тупик *D*;

3) прицепляет вагон «*ч*» и идет с ним на *AB*;

4) прицепляет «*б*» и идет с вагонами «*ч*» и «*б*» на *BD*;

5) оставляет на *BD* вагон «*ч*» и идет с вагоном «*б*» на *AD* через *BA*;

6) оставляет там вагон «*б*», а сам возвращается на *AD*.

Вы, конечно, заметили, что по окончании «маневров» паровоз оказался теперь трубой налево.

Машинист, вероятно, потому и предпочел решение задачи в 10 ходов, а не в 6, что не хотел поворачивать свой паровоз из 180°.

155. *Первое взвешивание*: развесить крупу на 2 равные части (это можно сделать без гирь) по 4,5 кг. *Второе взвешивание*: одну из получившихся частей еще раз развесить пополам — по 2,25 кг. *Третье взвешивание*: от одной из этих частей отвесить (при помощи гири) 250 г. Останется 2 кг.

156. Не выходя из пределов одной плоскости, то есть располагая все 7 треугольников так, чтобы они лежали, скажем, на столе, эту задачу решить невозможно. Нужно обязательно «выйти в пространство» и составить 2 пирамиды с общим основанием так, как это показано на рис. 323.

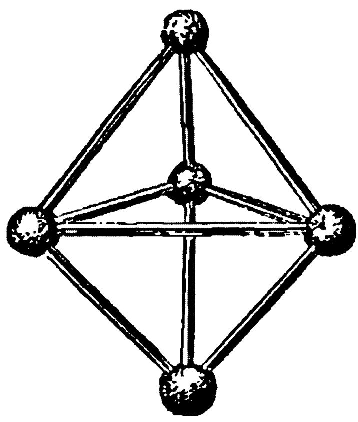


Рис. 323

157. Возьмите сначала произвольный прямоугольник с целочисленными сторонами и разбейте его на единичные квадраты (рис. 324). Рассмотрим теперь «каемку» шириной в одну квадратную клетку, примыкающую к сторонам прямоугольника (на рис. 324, а «каемка» заштрихована).

Площадь «каемки» — это уже часть площади прямоугольника, но число единичных квадратов в «каемке» всегда на 4 единицы меньше, чем число, выражающее периметр прямоугольника. Следовательно, оставшаяся «сердцевина» прямоугольника (незаштрихованная часть на рис. 324, *а*) непременно должна содержать 4 единичных квадрата.

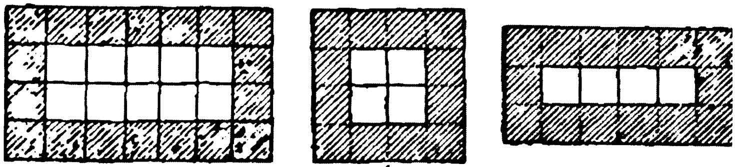


Рис. 324

«Сердцевина» искомого прямоугольника — также прямоугольник. Но 4 единичных квадрата можно лишь двумя способами расположить в форме прямоугольника (незаштрихованные части на рис. 324, *б* и *в*). Окаймляя их, мы получаем два решения:

1) квадрат 4×4;

2) прямоугольник 6×3.

Алгебраическое решение задачи приводит к неопределенному уравнению с двумя неизвестными. В самом деле, пусть размеры искомого прямоугольника x и y. Тогда его периметр равен $2(x + y)$, а площадь — xy.

По условию $2(x + y) = xy$.

Если x и y необязательно целые, то это уравнение имеет бесчисленное множество решений, но в целых числах оно имеет только три решения:

$$x = 4, y = 4;$$
$$x = 6, y = 3;$$
$$x = 3, y = 6.$$

В геометрическом смысле последние два решения тождественны.

158. Вспомним все положения условия задачи (рис. 107). Начнем с рис. 107, *а*, на котором показано, что бутылка со стаканом уравновешивают кувшин. На левой чашке весов (рис. 107, *б*) находится бутылка, а на правой — тарелка со стаканом. Добавив по 1 стакану на обе чашки весов, мы не нарушим равновесия. Следовательно, бутылка со стаканом уравновесят тарелку и 2 стакана (рис. 325, *а*). Сравнивая левые чашки весов на рис. 107, *а* и 359, *а*, мы заключаем, что кувшин весит столько же, сколько тарелка и 2 стакана. Но так как, с другой стороны, 2 кувшина уравновешивают 3 тарелки (рис. 107, *в*), то 3 тарелки весят столько же, сколько 2 тарелки с 4 стаканами (рис. 325, *б*).

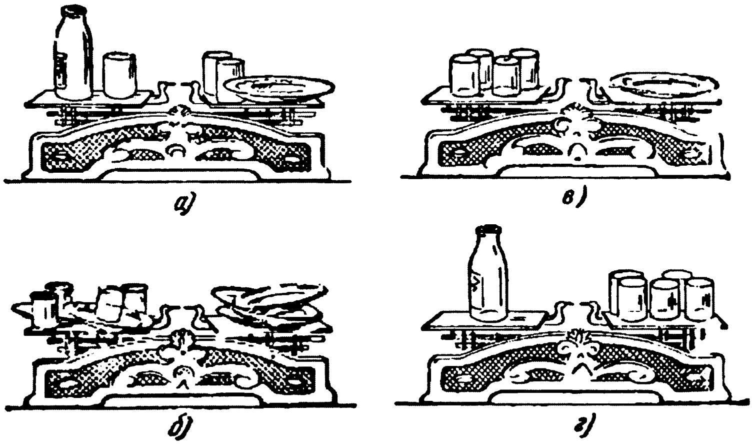


Рис. 325

Снимем теперь по 2 тарелки с каждой чашки весов, изображенных на рис. 325, *б*, тогда окажется, что вес одной тарелки равен весу 4 стаканов (рис. 325, *в*). Вернемся к весам, изображенным на рис. 107, *б*. Вместо одной тарелки поставим 4 стакана; 5 стаканов уравновесят бутылку (рис. 325, *г*), что и дает ответ задачи: бутылка в 5 раз тяжелее стакана. Попутно выясняется, что кувшин в 6 раз тяжелее стакана.

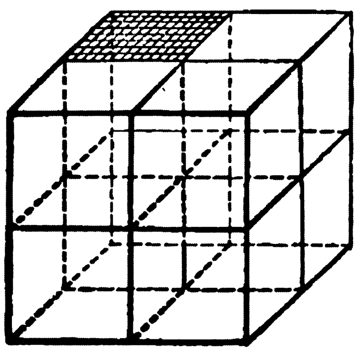


Рис. 326

159. Мастер разрезал каждый кубик на 8 кубиков (рис. 326). Площадь грани каждого кубика стала в 4 раза меньше, но число кубиков — в 8 раз больше, следовательно, общая площадь наружной поверхности всех кубиков увеличилась вдвое.

160. Мы налили полную банку воды. Вода заполнила все промежутки между дробинками. Теперь объем воды вместе с объемом свинца составил объем банки.

Вынув свинец из банки, мы определили объем воды, оставшейся в банке, и вычитанием объема воды из объема банки определили объем свинца.

161. Как видно из построения (рис. 327), сержант пришел в тот же пункт, откуда начал движение.

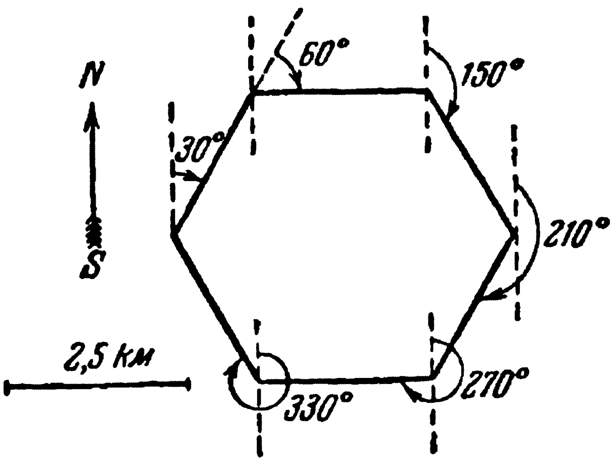


Рис. 327

162. Непосредственное измерение расстояния (см. рис. 108) от одного среза сучка до другого среза того же сучка показывает, что оно составляет около $\frac{2}{3}$ ширины всего листа фанеры.

Ширина листа фанеры 150 см. Отсюда расстояние между сучками, или длина окружности слоя бревна, составляет 100 см, а диаметр d слоя бревна $d \approx 100 : 3{,}14 \approx 32$ см.

163. Никакими изобретениями нельзя довести экономию топлива до 100%, так как энергия не может возникнуть «из ничего». Уже одно только это обстоятельство показывает, что экономия была подсчитана непродуманно.

Если применение каждого изобретения экономит определенное количество топлива независимо от применения других изобретений, то одновременное применение всех трех изобретений даст бо́льшую экономию топлива, чем применение любого одного из них, но, конечно, не 100%.

Подсчет следует производить так. Пусть до применения изобретений расходуется 100 кг топлива. После применения изобретения, экономящего 30%, топлива будет расходоваться 70 кг.

Второе изобретение экономит 45% от 70 кг топлива, то есть снижает расход топлива до $0{,}55 \times 70 = 38\frac{1}{2}$ кг. Следующее изобретение экономит 25% от $38\frac{1}{2}$ кг топлива, то есть снижает расход топлива до $0{,}75 \times 38\frac{1}{2} = 28\frac{7}{8}$ кг. Общая экономия топлива равна 100 кг $- 28\frac{7}{8}$ кг $= 71\frac{1}{8}$ кг, что и составляет $71\frac{1}{8}$% экономии.

Можно изменить порядок подсчета результатов действия изобретений; например, сначала учесть действие изобретения, экономящего 45% топлива, потом 30%, потом 25% или еще в ином порядке — окончательный результат будет одинаков.

Убедитесь в этом.

Если же действие одного изобретения на экономию топлива зависит от действия остальных изобретений, то практически может оказаться так, что эффект от применения всех трех изобретений будет такой же, как от одного наиболее сильного изобретения, то есть в данном случае 45%.

164. На рис. 328, *а*, *б*, *в* даны соответственно решения задач 1, 2, 3.

165. 1) Получить в сечении куба правильный пятиугольник невозможно. В самом деле: для получения правильного пятиугольника секущая плоскость должна пересечь 5 из 6 граней куба. Но все его грани попарно параллельны. Следовательно, в сечении должна получиться фигура, имеющая параллельные стороны (когда 2 параллельные плоскости пересекаются третьей, то линии пересечения параллельны), чего в правильном пятиугольнике быть не может.

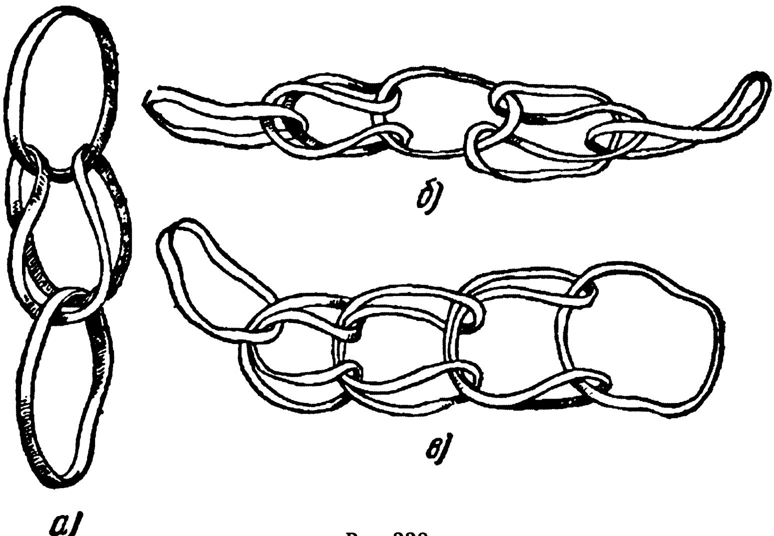


Рис. 328

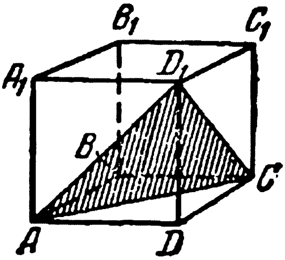


Рис. 329

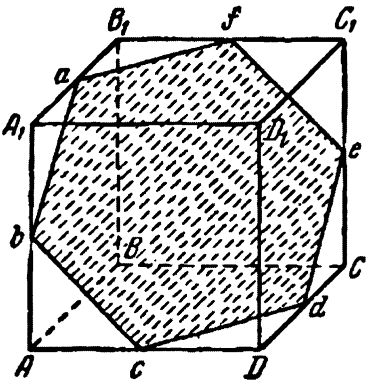


Рис. 330

2) Если разрезать куб по плоскости, проходящей через такие, например, три его вершины, как D_1, A и C (рис. 329), то в сечении, очевидно, получится правильный треугольник AD_1C, так как его сторонами будут диагонали AD_1, AC и D_1C равных квадратов.

Правильный треугольник получается не только в сечении AD_1C, но и в параллельном ему сечении A_1BC_1, а также в любом сечении, параллельном указанным сечениям, но расположенном *не между ними*.

Самостоятельно выясните, какая получится фигура при пересечении куба плоскостью, параллельной сечениям AD_1C и A_1BC_1, расположенной *между* ними.

Чтобы получить в сечении правильный шестиугольник, необходимо провести плоскость через точки a, b, c, d, e, f — середины ребер A_1B_1, AA_1, AD, DC, CC_1, B_1C_1 (рис. 330). Используя середины других ребер, можно еще получить правильные шестиугольники (всего 4), но все они будут равными.

3) Секущая плоскость может пересечь каждую грань куба не больше одного раза, а всех граней в кубе 6. Следовательно, в сечении куба плоскостью невозможно получить многоугольник с числом сторон, большим чем 6.

166. Накладываем чертежный треугольник на окружность так, чтобы вершина C треугольника совместилась с какой-нибудь точкой окружности, и отмечаем точки D и E пересечения катетов с окружностью. Отрезок DE будет диаметром (рис. 331).

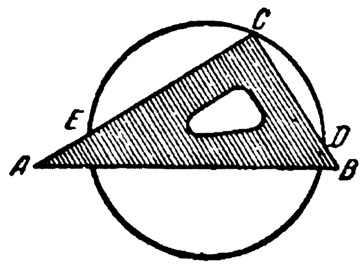


Рис. 331

Аналогичным путем построим второй диаметр. Точка пересечения диаметров будет центром окружности.

167. Так как оба ящика имеют форму куба, то в одном ящике будут укладываться 3 шара в ряд, а в другом 4. Одинаковые ящики имеют равные ребра, следовательно, диаметр большего шара больше диаметра меньшего в $^4/_3$ раза, а объем и вес больше в $^{64}/_{27}$ раза (так как объем, а также и вес шара пропорциональны кубу его диаметра).

Итак, каждый большой шар должен быть тяжелее меньшего шара в $^{64}/_{27}$ раза, но зато больших шаров в $^{64}/_{27}$ раза меньше, чем меньших шаров в таком же ящике.

Отсюда и получается, что оба ящика весят одинаково.

168. Части куба представляют собой фигуры, изображенные на рис. 332. В сложенном виде их прямые углы A и A_1, а также B и B_1 совпадали.

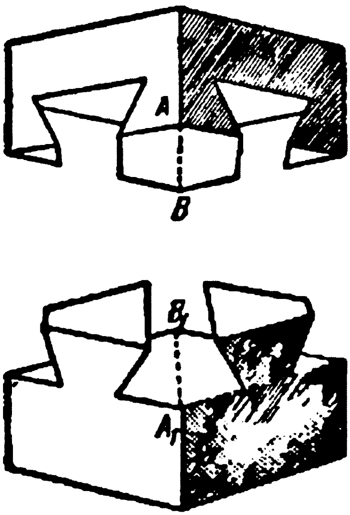


Рис. 332

Части куба разъединялись только движением с угла на угол по линии AB.

169. Поставив ножку циркуля в любую точку M шара, произвольным радиусом описываем на его поверхности окружность, на которой берем три произвольные точки A, B и C (рис. 333, *а*). Расстояния между ними засекаем циркулем и откладываем их на бумаге в форме треугольника ABC (рис. 333, *б*).

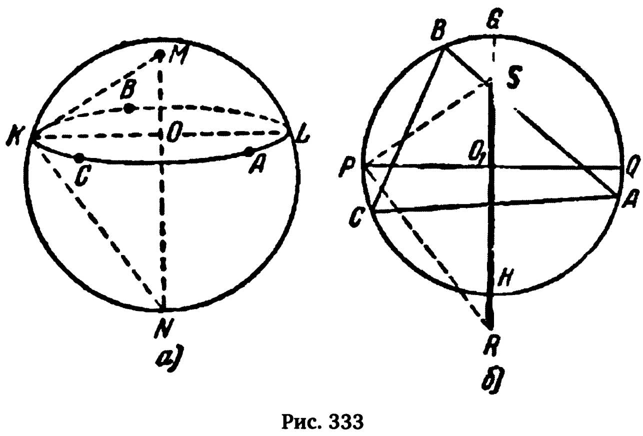


Рис. 333

Далее описываем окружность около треугольника ABC и проводим два взаимно перпендикулярных диаметра PQ и GH.

Эта окружность равна окружности, которую мы описали на шаре, следовательно, $PQ = KL$.

Пусть точка P на этой окружности соответствует точке K на поверхности шара. Засекаем циркулем расстояние KM и из точки P радиусом KM отмечаем на GH точку S. Строим $PR \perp PS$ до пересечения в точке R с продолжением GH. Отрезок SR и будет равен диаметру шара.

В самом деле, если соединить отрезками точку K с концами диаметра MN, то образовавшийся прямоугольный треугольник MKN будет равен прямоугольному треугольнику SPR, так как у них $KM = PS$ и $KO = PO_1$.

170. Разрежем брусок (параллелепипед) на 2 равных ступенчатых тела, как показано на рис. 334, *а*, причем высоту ступени сделаем равной 9 см, а ширину — 4 см.

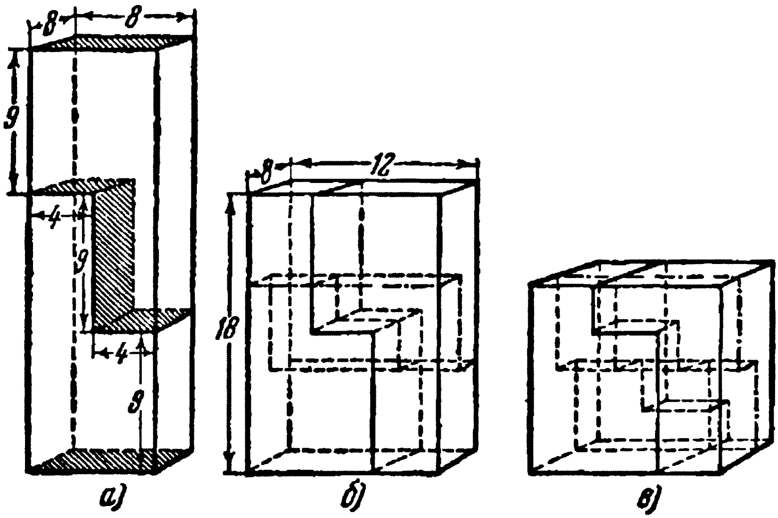


Рис. 334

Перемещая верхнюю часть бруска на ступеньку ниже, мы составим новый брусок (параллелепипед) с ребрами 12, 8 и 18 см (рис. 334, *б*).

Полученный брусок (параллелепипед) вновь разрезаем таким же образом на 2 ступенчатых тела, но теперь уже в направлении, перпендикулярном к предыдущему. Высоту ступеньки делаем 6 см, а ширину 4 см. Каждое ступенчатое тело разделится при этом еще на 2 ступенчатых тела так, что всего их будет 4.

Перемещая 2 верхние части бруска на ступеньку ниже, мы составим куб (рис. 334, *в*).

171. См. решение на рис. 335.

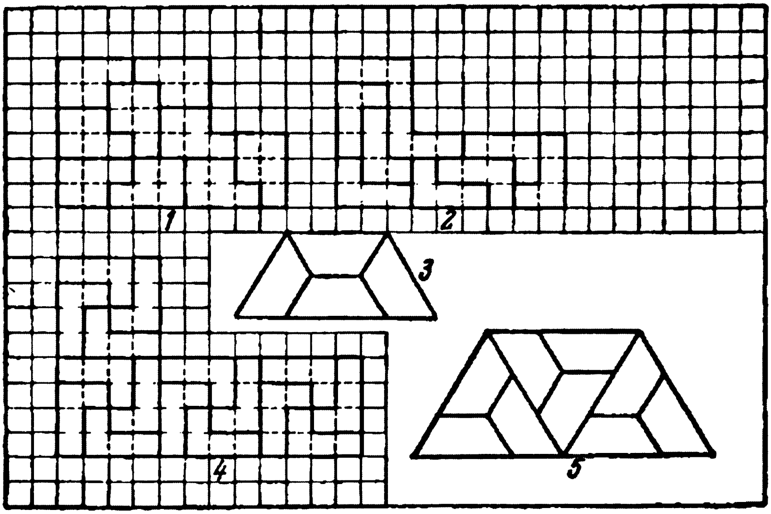


Рис. 335

172. 1) 36.

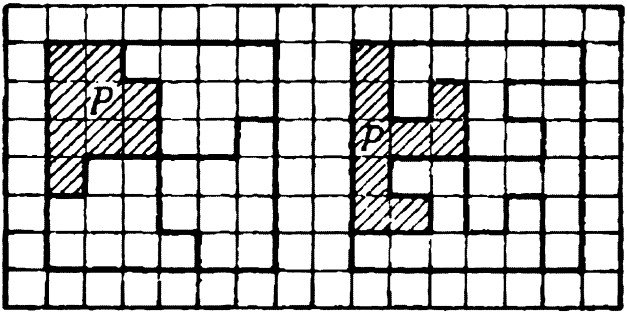


Рис. 336

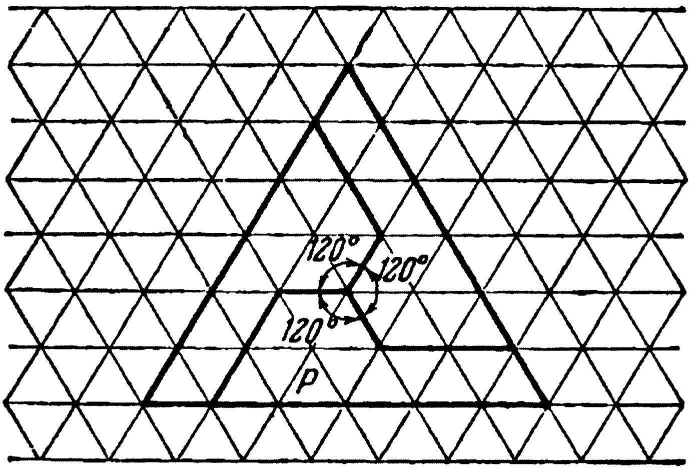


Рис. 337

2) Несколько примеров приведено на рис. 336 и 337. Для получения первичных многоугольников P из прямоугольника следует построить прямоугольник, содержащий в себе четное число ($ab = 2n$) единичных квадратов, и провести из центра этого прямоугольника 2 ломаные линии одинаковой конфигурации под углом 180° друг к другу (рис. 338). Вместе эти ломаные составят одну ломаную линию, симметричную относительно центра прямоугольника Эта линия рассечет прямоугольник на 2 фигуры P, в каждой из которых будет $\frac{ab}{2} = n$ единичных квадратов.

Далее, из равных прямоугольников легко составить большой квадрат, а из больших квадратов фигуру P'.

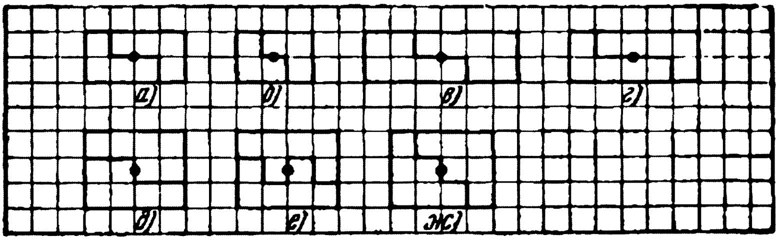


Рис. 338

Если a — число единичных квадратов, укладывающихся в прямоугольнике вдоль одной стороны, а b — число единичных квадратов вдоль другой его стороны, то, как легко понять, для составления квадрата из таких прямоугольников необходимо и достаточно взять их $\frac{ab}{m^2}$ штук, где m — наибольший общий делитель чисел a и b.

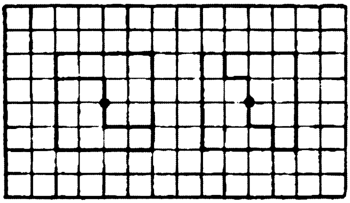


Рис. 339

В каждом квадрате окажется $\frac{2ab}{m^2}$ фигур P, а на всю фигуру P' будет потрачено $\frac{2abn}{m^2}$ фигур P или, так как $2n = ab$, то на построение P' будет потрачено $\frac{a^2b^2}{m^2}$ фигур P.

Так, например, для составления многоугольника P', подобного соответствующему многоугольнику P, требуется:

16 фигур P, приведенных на рис. 338, *а* 36 фигур P, приведенных на рис. 338, *б*, *в* 100 фигур P, приведенных на рис. 338, *г*

144 фигур P, приведенных на рис. 338, *д*, *е*, *ж*.

Та или иная из фигур P', вероятно, может быть составлена и из меньшего числа фигур P, но в данном случае вопрос нас не интересовал. В качестве же дополнительного развлечения вы можете это выяснить опытным путем.

Можно и квадрат разбивать на фигуры P не четырьмя ломаными линиями, как это мы делали, а так же, как и прямоугольник, одной — симметричной относительно центра. Соответствующие иллюстрации приведены на рис. 339.

173. Так как внутренние углы девятиугольника и десятиугольника содержат соответственно 140° и 144°, то, выполнив их построение при помощи шарнирного механизма на одном чертеже при общей вершине A, мы получим угол 4°. Применяя к этому углу дважды процедуру деления пополам, мы получим угол 1°.

К главе VI

174. Так как в 28 костях домино каждая цифра от 0 до 6 повторяется 8 раз (целое число пар), а кости прикладываются парами квадратов, содержащих по одинаковому числу очков, то цепочка костей домино, начавшаяся квадратом с 5 очками, должна закончиться парным ему квадратом, то есть тоже только 5 очками.

175. Первый фокус. Из решения предыдущей задачи следует, что все 28 костей домино при соблюдении правил игры располагаются по кругу, и если из этого круга отнять, например, кость 3–5, то ясно, что цепочка расположения остальных 27 костей начнется с одного конца 5, а с другого 3 очками.

Второй фокус. Почему так, нетрудно разобраться. Числа очков 13 костей домино, расположенных вами слева направо, представляют последовательность 12, 11, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0. Далее, направо, в произвольном порядке расположено 12 костей, часть которых (не больше 12 по условию) переместилась справа налево, за кость 6–6. До перемещения костей среднее положение занимает «пустая» кость («бланш»), то есть 0–0.

Представим теперь, что в ваше отсутствие перемещена с правого конца на левый 1 кость домино. Какая кость окажется теперь в середине? Очевидно, 0–1. Единица и сообщает вам, что перемещена 1 кость. А если ваши товарищи переместили 2 кости, то в середине ряда окажется кость с двумя очками и т.д. Словом, средняя кость обязательно расскажет вам о числе перемещающихся костей.

176. Неиспользованными остались кости 0–2, 1–2, 2–5, 6–2.

Выставлены 2–4, 3–4, 3–2, 2–2.

Между игроками *Б*, *В* и *Г* возможно следующее распределение костей: у *Б*: 0–1, 0–3, 0–6, 0–5, 3–6, 3–5; у *В*: 0–0, 1–1, 2–2, 3–3, 4–4 и 3–4; у *Г*: 6–6, 5–5, 6–5, 6–4, 5–4, 6–1.

177. Верхняя сторона (слева направо): 4–3, 3–3, 3–1, 1–1, 1–4, 4–6, 6–0. Боковая правая сторона (сверху вниз): 0–2, 2–4, 4–4, 4–5, 5–5, 5–1, 1–2. Нижняя сторона (справа налево): 2–3, 3–5, 5–0, 0–3, 3–6, 6–2, 2–2. Боковая левая сторона (снизу вверх): 2–5, 5–6, 6–6, 6–1, 1–0, 0–0, 0–4. Соединение в двух верхних углах показано на рис. 340.

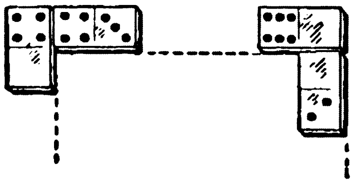


Рис. 340

178. Возможны различные решения. Если в вершинах углов вы поместите по пустому квадрату (0 очков), то можете построить такую «рамку в рамке», каждая из 8 сторон которой будет содержать по 21 очку.

Если сумма очков в 8 вершинах «рамки в рамке» будет равна 8, как на рис. 341, то сумма очков вдоль каждой стороны этой фигуры составит 22 очка. Каждая сторона фигуры будет содержать по 23 очка, если сумма очков во всех вершинах фигуры будет равна 16; по 24 очка соответственно при сумме 24 очка; по 25 очков при сумме 32 очка; по 26 очков при сумме 40 очков.

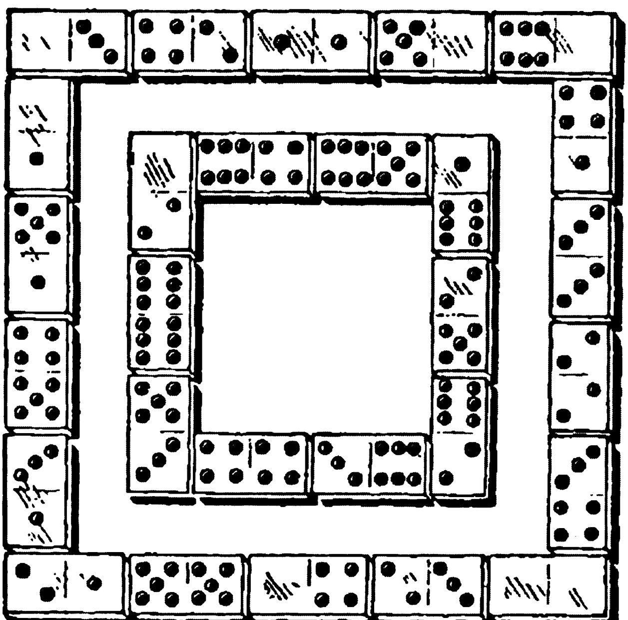


Рис. 341

Построить «рамку в рамке» так, чтобы сумма очков в каждой из сторон равнялась 27, невозможно, так как в этом случае в 8 вершинах должно было бы содержаться 48 очков, а больше 47 их быть не может. В самом деле, если мы в 7 вершин углов поместим даже все 7 шестерок, то в восьмую вершину придется поместить 5, и тогда получим $6 \times 7 + 5 = 47$ очков.

179. Решение показано на рис. 342.

180. 1) Решение показано на рис. 343.

2) Решение показано на рис. 344. Константа квадрата 24.

3) Одно из возможных решений показано на рис. 345.

4) Решение представлено схемой:

5-3	0-3	0-6	2-2	1-5
1-1	3-2	1-6	4-5	0-4
6-2	4-6	0-0	1-2	2-4
0-1	1-3	2-5	3-6	3-3
4-4	1-4	3-4	0-2	0-5

Перенося в этом квадрате столбцы или строки, мы опять будем получать волшебные квадраты, подобно тому как получали их из квадрата с 16 костями (см. текст задачи).

181. Решение показано на рис. 346.

182. Решение показано на рис. 347.

183. Пусть задуманная кость x–y и выбрана та половинка задуманной кости, которая содержит x очков. Выполним действия, указанные в условии. 1) $2x$; 2) $2x + m$; 3) $(2x + m)\,5 = 10x + 5m$; 4) $10x + 5m + y$. Вычитаем $5m$, остается $10x + y$ — двузначное число; цифры десятков и единиц этого двузначного числа совпадают с цифрами x и y, указывающими число очков в задуманной кости.

184. Из условия следует, что «угадываемая» сумма очков состоит из числа очков на верхних гранях всех кубиков в их последнем положении плюс сумма очков на какой-либо паре противоположных граней одного кубика, а последняя сумма, как известно, равна 7.

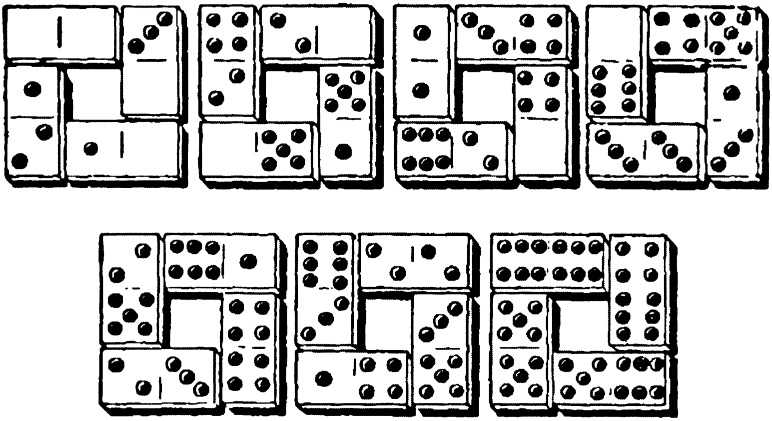


Рис. 342

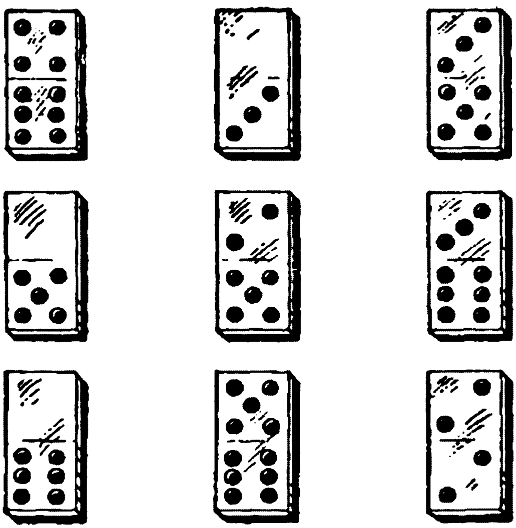


Рис. 343

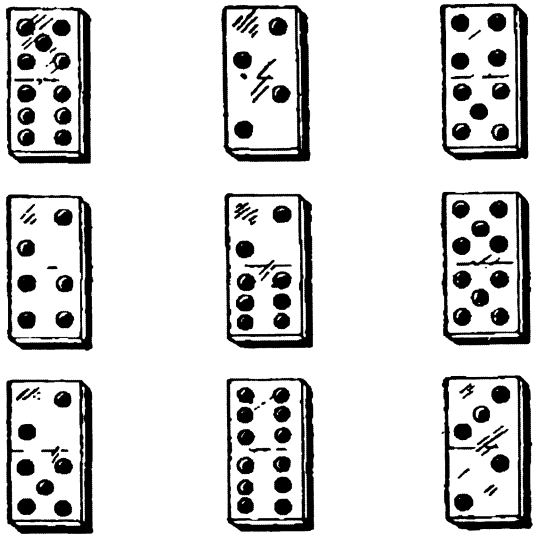


Рис. 344

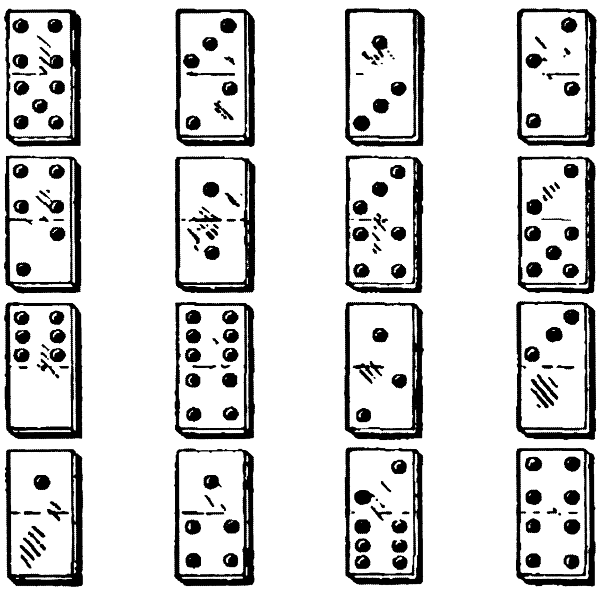


Рис. 345

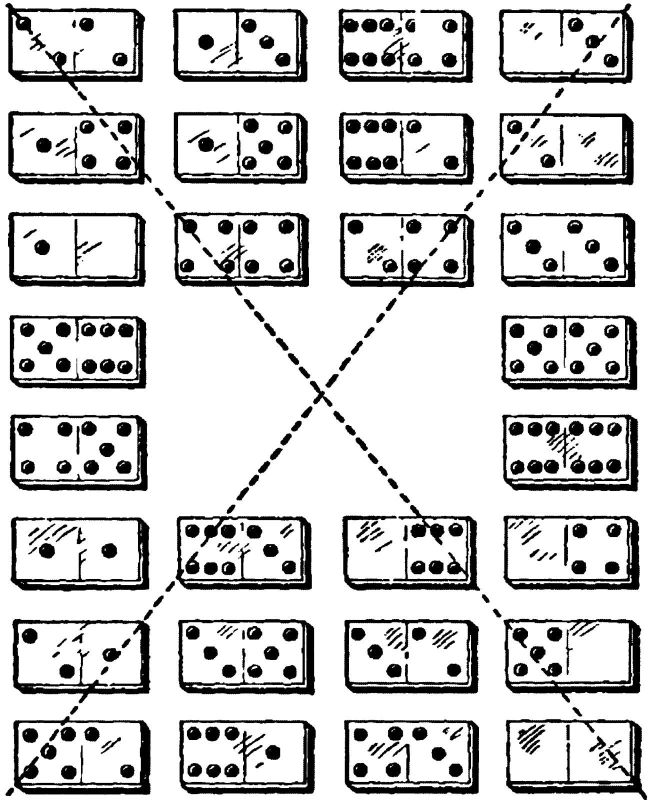


Рис. 346

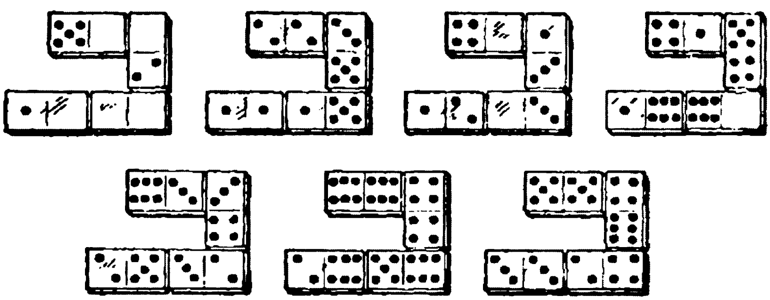


Рис. 347

185. а) *Определение скрытой суммы по замеченному числу очков на верхней грани столбика.* Сумма очков, скрытых между гранями, по которым соприкасаются кубики, и еще одной — самой нижней — равна 21 минус число точек, замеченных на верхней грани столбика (см. рис. 138).

В самом деле, если бы складывались очки, соответствующие всем горизонтальным граням трех кубиков, то есть очки, соответствующие трем парам взаимно противоположных граней кубиков, то такая сумма составляла бы ровно 21 ($3 \times 7 = 21$). Но в сумме, обусловленной задачей, не участвует число очков, соответствующих верхней грани. Вычитая это число из 21, мы получим искомую сумму.

б) *Определение скрытой суммы по двум замеченным боковым граням столбика.* Даже при соблюдении «принципа семи» возможны два порядка расположения точек на гранях игрального кубика. Один порядок расположения — зеркальное отражение другого. Положите кубик на стол единицей вверх. Тогда две точки расположатся на одной из боковых граней, а три точки — на одной из соседних граней слева или справа от нее. Другими словами, при взгляде сверху три очка следуют за двумя либо по движению часовой стрелки (рис. 348, *а*), либо против движения часовой стрелки (рис. 348, *б*).

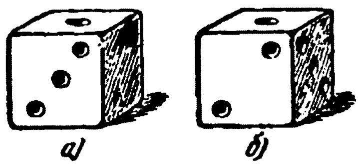


Рис. 348

После установления порядка следования одной, двух и трех точек расположение четырех, пяти и шести точек на остальных гранях кубика определяется однозначно по «принципу семи».

Зная заранее относительное расположение точек на гранях кубика и помня «принцип семи», достаточно взглянуть на любые две соседние боковые грани кубика, чтобы определить число очков на верхней, а затем и на нижней его гранях.

Например, на нижнем кубике рис. 138 мы видим на одной боковой грани 3 точки, а на соседней справа — 5. Значит, на соседней слева должно быть 2 точки, а следовательно, сверху 1, снизу 6 (если кубик типа *б*). На среднем кубике ближняя грань имеет 6 очков, значит, дальняя — 1, справа 3, следовательно, сверху 2, а снизу 5.

Конечно, для безошибочного отгадывания числа точек на скрытых гранях кубика указанным методом нужна острая наблюдательность и предварительная практика.

186. Так как сумма очков на верхней и нижней гранях каждого игрального кубика всегда равна 7, то приписанные три цифры будут последовательно дополнять до 7 цифры первоначально написанного трехзначного числа.

Если первоначально написанное трехзначное число обозначить буквой A, то приписанное трехзначное число будет $777 - A$, а все шестизначное: $1000A + (777 - A)$, или $999A + 777 = 111 \times (9A + 7)$. Как видно, оно делится на 111; получается $9A + 7$. Это число и объявляют. Отняв от него 7 и разделив на 9, получаем первоначальное число A.

К главе VII

187. **1**. Остаток от деления числа на 9 тот же самый, что и от деления суммы его цифр на 9 (свойство 2 из начала главы). Раз сумма цифр уменьшена на величину, выраженную зачеркнутой цифрой, то и остаток уменьшится на ту же величину. Очевидно также, что величина остатка не изменится, если зачеркнутая цифра 9 или 0.

2. По свойству 1 (б) (см. начало главы) разность задуманных чисел всегда делится на 9, значит, сумма цифр разности кратна 9, и если названное нам число не делится на 9, то только за счет зачеркнутой цифры, которая, очевидно, и определяется дополнением названного числа до ближайшего, кратного 9. Если само названное число кратно 9, то это значит, что зачеркнута цифра 9.

Вариант задачи, указанный в примечании, основан на свойстве 1 (а) (см. начало главы).

3. Нужно подсчитать сумму цифр полученной разности ($6 + 9 + 8 = 23$).

Дополнение этой суммы до ближайшего числа, кратного 9, определит зачеркнутую цифру.

В нашем примере: $27 - 23 = 4$; зачеркнутая цифра 4.

Правило следует из свойств девятки.

4. К каждому написанному вами числу я дописываю такое, цифры которого дополняют цифры вашего числа до 9, тогда сумма должна быть кратна 9, и она останется кратной 9, если вы зачеркнули 9; если же вы зачеркнули другую цифру, не 9, то полученная сумма цифр суммы не будет кратна 9 и зачеркнутая цифра определится числом, дополняющим названную вами сумму до ближайшего числа, кратного 9.

5. Приписывается число, каждая цифра которого дополняет сумму цифр соответствующего столбика до 9 или числа, кратного 9. Искомая цифра находится по общему правилу.

6. Сначала нужно приписать столбец чисел, дополняющих сумму чисел каждой строки до кратного 9, сложить приписанные числа (девятки можно при этом не принимать во внимание) и вместо всего столбца этих чисел приписать только остаток от деления их суммы на 9.

Так, в нашем примере сумма приписанных чисел (без девятки) равна $6 + 4 + 4 + 5 = 19$. Остаток от деления 19 на 9 равен 1. Следовательно, вместо столбца чисел 6, 4, 4, 5 и 9 достаточно было бы приписать одно число 1.

188. Вы предложили, например, из 1313 вычесть 48. Получилось 1265. Приписали 148 и зачеркнули, скажем, цифру 6. Осталось 125 148. Теперь нужно сложить оставшиеся цифры: $1 + 2 + 5 + 1 + 4 + 8 = 21$. До ближайшего числа, кратного 9, не хватает 6 ($27 - 21 = 6$), значит, зачеркнута цифра 6.

Почему именно так — понять нетрудно. Мы знаем, что при вычитании чисел излишки вычитаются, а при сложении — складываются (см. свойство 3 (а) в начале главы).

Здесь мы приписываем то же число, какое вычитаем, увеличенное на 100, следовательно, излишек результата на 1 больше излишка исходного числа — 1313, а так как сумма цифр этого числа равна $1 + 3 + 1 + 3 = 8$ и излишек тоже равен 8, то число, получающееся в окончательном результате (до вычеркивания цифры), всегда будет кратно 9, и определить вычеркнутую у него цифру можно дополнением суммы его цифр до ближайшего числа, кратного 9.

Понятно, что в качестве исходного числа можно взять любое другое, сумма цифр которого равна 8 или имеет излишек, равный 8.

Для разнообразия к разности, о которой говорится в задаче, можно предлагать приписывать непосредственно то число, которое вычиталось (без предварительного увеличения на 100), но в таком случае для отыскания зачеркнутой цифры к сумме оставшихся цифр следует прибавить 1, если излишек исходного числа был 8, а потом уже дополнять до числа, кратного 9. (Вообще прибавлять к сумме цифр нужно разность между числом 9 и излишком исходного числа.)

189. 1. Нужно подсчитать сумму цифр, образовавшихся на «прямой итогов», и вычесть ее из ближайшего к этой сумме числа, кратного 9. Разность и покажет искомую цифру.

Дело в том, что пока комплект цифр 1,..., 9 полный, их сумма кратна 9. Действительно, сумма $(1 + 8) + (2 + 7) + (3 + 6) + (4 + 5)$, очевидно, делится на 9. Числа на «прямой итогов» образованы от сложения цифр этого комплекта. Если бы в сложении участвовали все данные цифры, то сумма чисел на «прямой итогов» или сумма цифр этих чисел тоже была бы кратна 9, а так как одна цифра комплекта не участвует в сложении, то сумма цифр на «прямой итогов» будет отличаться от числа, кратного 9, на число, определяющее интересующую нас цифру. В частности, сумма цифр на «прямой итогов» рис. 141 равна $1 + 4 + 1 + 4 + 1 + 2 = 13$. До 18 не хватает 5, значит, искомая цифра 5.

2. Искомая цифра 3. Сумма цифр на «прямой итогов» рис. 143 равна $1 + 4 + 1 + 3 + 2 + 5 + 1 + 1 + 3 + 1 + 2 = 24$. До 27 не хватает 3, значит, вне линий должна остаться цифра 3.

Способ решения обосновывается соображениями, аналогичными приведенным к решению предыдущей задачи.

3. По причине, ясной из предыдущего, искомое число равно дополнению суммы цифр сообщенного числа до ближайшего числа, кратного 9.

190. Рассмотрим таблицу всех возможных результатов:

11 × 99 =	1	0	8	9
22 × 99 =	2	1	7	8
33 × 99 =	3	2	6	7
44 × 99 =	4	3	5	6
55 × 99 =	5	4	4	5
66 × 99 =	6	5	3	4
77 × 99 =	7	6	2	3
88 × 99 =	8	7	1	2
99 × 99 =	9	8	0	1

Нетрудно подметить следующие свойства этих произведений:

1) первая цифра результата всегда дополняет третью цифру до 9, а вторая — последнюю, четвертую, цифру дополняет до 9;

2) вторая цифра всегда на 1 меньше первой;

3) цифры множимого совпадают с первой цифрой произведения.

Знание этих свойств дает возможность, не заглядывая в таблицу, определить результат любого из рассмотренных умножений по одной его цифре.

По условию задачи третья цифра результата 5. Значит, первая цифра 4 (свойство 1), вторая цифра 3 (свойство 2), четвертая цифра 6 (свойство 1). Таким образом, искомое число 4356.

Свойство 3 позволяет определить сразу и множимое, не производя деления произведения на множитель. В данном случае оно — 44.

191. Средней цифрой разности всегда будет 9, а крайние цифры дополняют одна другую до 9 (последнее следует также из свойства 1 (б), см. начало главы).

В самом деле, пусть A, B и C — цифры некоторого трехзначного числа. Запишем данное число арифметически: $[A]$ $[B]$ $[C]$. Обращенное число будет $[C]$ $[B]$ $[A]$. Пусть $A > C$, тогда $[A]$ $[B]$ $[C] > [C]$ $[B]$ $[A]$. Составим разность:

$$\begin{array}{r} _{-}[A]\ [B]\ [C] \\ [C]\ [B]\ [A] \\ \hline \end{array}$$

Последней цифрой разности будет $10 + C - A$ (так как $C < A$, то для вычитания занимаем 10 единиц из числа десятков B). Средней цифрой разности будет $10 + (B - 1) - B = 9$ (число десятков уменьшилось на 1, и для вычитания занимаем 10 десятков из числа сотен A).

Таким образом, действительно средняя цифра разности всегда 9.

Первой цифрой разности будет: $(A - 1) - C$. Сумма первой и последней цифр разности будет: $A - 1 - C + 10 + C - A = 9$.

192. Разность между двумя любыми числами с переставленными знаками всегда 9 или кратна 9. Как нетрудно проверить, все условия задачи будут выполнены только для случая, когда разность возрастов A и B равна 9. Но тогда возраст C составляет половину от 9, то есть $4\,{}^1\!/_2$ года; B в 10 раз старше C, следовательно, ему 45 лет; в свою очередь возраст A — 54 года. Итак, A — 54 года, B — 45 лет и C — $4\,{}^1\!/_2$ года.

193. Удалось ли вам догадаться, что гость составлял числа так: средней цифрой числа была произвольная цифра, кроме нуля, а сумма остальных цифр делилась на 9 без остатка? Но мало догадаться, нужно еще доказать, что любое число с такой особенностью цифр будет обладать свойством, указанным в условии.

С этой целью вспомним прежде всего, что если некоторое число S делится на 9, то, складывая все его цифры, мы получим новое число (S_1), которое тоже делится на 9. Далее, если число S_1 — не однозначное, то, складывая его цифры, мы получим еще одно число (S_2), которое тоже обязано делиться на 9, и т. д. Продолжая этот процесс, мы неизбежно придем к однозначному числу, делящемуся на 9. Но единственное однозначное число, которое делится на 9, это само 9.

Теперь обратимся к такому числу: $\ldots cbaxmnp \ldots$, сумма всех цифр которого без средней

$$S = \ldots c + b + a + m + n + p \ldots$$

по условию делится на 9.

Если число S однозначное, то оно 9, если же неоднозначное, то сумма его цифр или какая-либо из последующих сумм цифр получающихся таким образом чисел, как сказано, обязательно 9. Следовательно, повторяя несколько раз процесс сложения всех цифр сначала у данного числа $\ldots cbaxmnp \ldots$, затем у суммы его цифр и т. д., мы неизбежно придем к числу $9 + x$, где x — средняя цифра данного числа. А окончательная сумма цифр для числа $9 + x$ равна x. В самом деле, придадим числу $9 + x$ такой вид: $10 + (x - 1)$. Сумма его цифр: $1 + 0 + x - 1 = x$.

К главе VIII

194. Решение этой задачи лучше начать «с конца», приняв во внимание то, что после третьего перехода у Бездельника оказалось ровно 24 рубля, которые он должен был отдать. Если после последнего перехода у Бездельника оказалось ровно 24 рубля, то, значит, перед этим переходом у него было 12 рубля. Но эти 12 рубля получились после того, как он отдал 24 рубля; значит, всего денег у него было 36 рублей. Следовательно, второй переход моста он начал с 18 рублями, а эти 18 рублей получились у него после того, как он в первый раз прошел по мосту и отдал 24 рубля. Значит, всего после первого перехода у него было денег $18 + 24 = 42$ рубля. Отсюда ясно, что в начале Бездельник имел 21 рубль в своем кармане.

195. В конце обмена у каждого из братьев оказалось по 8 яблок. Следовательно, у старшего перед тем, как он отдал половину яблок своим братьям, было 16 яблок, а у среднего и младшего — по 4 яблока. Далее, перед тем как делил свои яблоки средний брат, у него было 8 яблок, а у старшего — 14 яблок, у младшего — 2. Отсюда, перед тем как делил свои яблоки младший брат, у него оказалось 4 яблока, у среднего — 7 яблок и у старшего — 13.

Так как каждый получил вначале столько яблок, сколько ему было три года назад, то младшему сейчас 7 лет, среднему брату 10 лет, а старшему 16.

196. После дележа патронов охотники втроем израсходовали 12 штук. После этого у всех вместе осталось столько штук, сколько после дележа было у каждого, то есть общее число патронов уменьшилось в три раза. Иными словами, охотники израсходовали две части, а одна часть осталась. Две части составляют 12 патронов, а одна часть — 6 штук. Значит, осталось 6 патронов. Это и есть число патронов, доставшихся каждому при дележе. Следовательно, перед дележом было 18 годных патронов.

197. В момент встречи машинистов расстояние между кондукторами будет $250 + 250 = 500$ м. Так как каждый поезд идет со скоростью 45 км/час, то кондукторы сближаются со скоростью $45 + 45 = 90$ км/час, или 25 м/сек.

Искомое время равно $500 : 25 = 20$ секунд.

198. Простота и краткость решения всякой задачи зависит от удачного выбора отправного пункта в цепочке рассуждений, или, говоря языком алгебры, от выбора неизвестного. Решая данную задачу, замечаем, что вторую половину рукописи Вера печатала втрое быстрее, чем первую.

Обозначим через n количество дней, затраченное Верой на печатание второй половины рукописи (при арифметическом решении примем за одну часть). Тогда первую половину рукописи Вера печатала $3n$ дней по 10 страниц в день. Отсюда полрукописи составляют $3n \times 10 = 30n$ страниц, а вся рукопись содержит $60n$ страниц. Всю рукопись Вера печатала $3n + n = 4n$

дней. Следовательно, при любом количестве страниц в рукописи в среднем Вера печатала $60n : 4n = 15$ страниц в день. Мама была права. Решите эту же задачу при другом выборе неизвестного.

199. Пусть число грибов, принесенных каждым мальчиком в лагерь, было x. Из условия задачи следует, что Маруся дала Коле $x - 2$ гриба, Ване $x + 2$ гриба, Андрюше $\frac{x}{2}$ и Пете $2x$ грибов, а всего

$$(x-2) + (x+2) + \frac{x}{2} + 2x = 4\frac{1}{2}x.$$

По условию

$$4\frac{1}{2}x = 45.$$

Отсюда $x = 10$.

Ответ. Коля получил от Маруси 8 грибов, Ваня 12 грибов, Андрюша 5 грибов, Петя 20 грибов. А когда пришли в лагерь, то у каждого мальчика было по 10 грибов.

200. Нередко отвечают, что оба вернутся одновременно. Думающие так обосновывают свой ответ тем, что, хотя спортсмен, гребущий по течению реки, опережает своего партнера на некоторое количество времени, на обратном пути, против течения, он столько же времени теряет.

Это представление ошибочно. Текущая вода действительно сокращает время, когда лодка идет по течению, и удлиняет его, когда движение имеет противоположное направление. В одном случае река как бы помогает движению, в другом — препятствует. Но помощь длится меньшее количество времени, чем сопротивление, значит, естественно ожидать, что спортсмен, плывущий по реке, вернется на старт *позже* спортсмена, плывущего по стоячей воде

К тому же выводу приводит рассмотрение такого крайнего случая. Пусть собственная скорость передвижения лодки (то есть скорость, которую могла бы иметь лодка в стоячей воде при том же количестве затраченных сил гребца) равна скорости течения воды, тогда спортсмен, плывущий по реке, достигнет намеченной точки, двигаясь по течению, вдвое быстрее, чем его партнер в озере. Но когда первый спортсмен повернет обратно, река его остановит, и вернуться к месту отплытия вплавь он вообще не сможет.

Перейдем к рассмотрению общего случая. Пусть скорость течения воды выражается величиной x, а собственная скорость передвижения лодки v. Тогда в стоячей воде иа путь s в один конец расходуется $\frac{s}{v}$ единиц времени, а на такой же путь s по течению расходуется $\frac{s}{v+x}$ единиц времени. Выигрыш во времени равен $\frac{s}{v} - \frac{s}{v+x}$, что после приведения к общему знаменателю дает:

$$\frac{s}{v} - \frac{s}{v+x} = \frac{sx}{v\,(v+x)} \text{ единиц времени.}$$

На тот же путь s против течения расходуется $\frac{s}{v-x}$ единиц времени и по сравнению с движением в стоячей воде проигрывается

$$\frac{s}{v+x} - \frac{s}{v} = \frac{sx}{v\,(v-x)} \text{ единиц времени.}$$

Сопоставляя дроби $\frac{sx}{v\,(v+x)}$ — выигрыш и $\frac{sx}{v\,(v-x)}$ — проигрыш во времени при движении по реке, устанавливаем, что первая дробь меньше второй, так как она отличается от второй дроби только бóльшим знаменателем. Следовательно, на реке больше проигрывается во времени при движении лодки против течения, чем выигрывается при движении ее по течению.

Итак, из двух гребцов вернется на старт раньше тот, который двигается в стоячей воде.

Проведите самостоятельно исследование такого вопроса: как изменение величины скорости течения воды будет влиять на проигрыш времени для гребца, плывущего по реке.

201. Рассуждения, приведенные в тексте задачи, позволяют установить, что время, затраченное пловцом на движение против течения от первого моста до места поворота назад, равно времени его движения по течению от места поворота до второго моста, под которым он догнал шляпу. Отсюда следует, что пловец, а вместе с ним и шляпа двигались по воде 20 минут. Шляпа за это время проплыла со скоростью течения все расстояние между первым и вторым мостами, то есть 1000 м. Следовательно, скорость течения равна 1000 : 20 = 50 м/мин.

Приведу еще одно решение этой же задачи, основанное на иных, но тоже очень остроумных рассуждениях. Будем рассматривать положение «с точки зрения шляпы».

Условимся, что не шляпа, увлекаемая текущей водой, плывет от первого моста ко второму, а второй мост плывет со скоростью воды по направлению к шляпе, покоящейся неподвижно под первым мостом в *неподвижной* воде. Суть дела от этого не изменится. Не так ли? Что же получается? Упала на воду шляпа. Шляпа стоит на месте, а к ней бежит мост №2. А что будет с пловцом? Пловец в неподвижной воде плывет в одну сторону 10 минут, потом столько же времени (потому что вода неподвижна) плывет обратно. Проплыв 20 минут, он возвращается на прежнее место и, следовательно, снова встречается со шляпой. В то же мгновение, пробежав 1000 м, к пловцу и шляпе подбегает мост №2 (в условии задачи было сказано, что пловец догоняет шляпу под мостом №2).

Значит, мост двигался со скоростью 1000 : 20 = 50 м/мин. Это и есть скорость течения. А скорость пловца не важна.

202. К спасательному кругу теплоходы подойдут одновременно. Действительно, если наблюдение за движением вести от пристани, то теплоход, идущий вниз, приобретает дополнительную скорость, равную скорости течения, а теплоход, идущий вверх, теряет такую же скорость. Если же наблюдение за движением теплохода вести со спасательного круга, который со скоростью течения воды плывет следом за идущим вниз теплоходом, то для этого теплохода теряется весь выигрыш в скорости и, наоборот, восстанавливается проигрыш в скорости для теплохода, идущего вверх. Другими словами, относительно плывущего круга будет получаться так, как будто круг стоит на месте, а теплоходы передвигаются в стоячей воде. Отсюда следует, что через час оба теплохода будут на одинаковом расстоянии от плывущего круга (так как их собственные скорости одинаковы) и, переменив направление движения, подойдут к нему тоже через час, то есть одновременно.

203. Катер *M*, покинув берег *A*, прошел 500 м и встретился с катером *N*. Вместе они прошли расстояние, равное длине озера (рис. 349). Продолжая движение, катер *M* достиг берега *B* и на обратном пути снова встретился с катером *N* на расстоянии 300 м от берега *B*. К этому моменту оба катера прошли длину озера трижды (см. схему на рис. 349). Отсюда следует, что от начала движения катеров до их второй встречи прошло в три раза больше времени, чем от начала их движения до первой встречи.

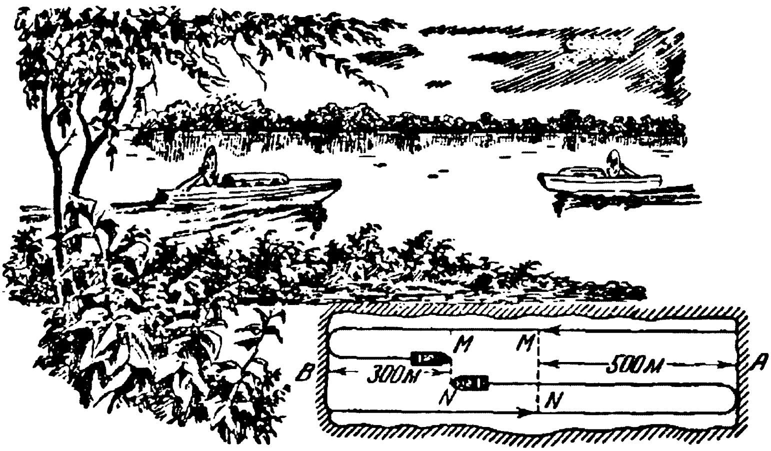


Рис. 349

Так как к моменту первой встречи катер *M* прошел 500 м, то к моменту второй встречи он сделал, следовательно, $500 \times 3 = 1500$ м (при постоянной скорости пройденный путь пропорционален времени). Длина озера на 300 м меньше пути, пройденного катером *M* от начала движения до второй встречи, то есть она равна $1500 - 300 = 1200$ м.

От начала движения катера *M* и от начала движения катера *N* до момента их первой встречи прошло одинаковое время, следовательно, отношение их скоростей равно отношению пройденных катерами расстояний за это время, то есть $\frac{v_1}{v_2} = \frac{500}{1200 - 500} = \frac{5}{7}$.

204. В два раза. Если половину меньшего числа обозначить буквой m, то остаток от меньшего числа тоже будет m, а остаток от большего числа — $3m$. Тогда меньшее число равно $m + m = 2m$, а большее $3m + m = 4m$. Отсюда большее число больше меньшего в $4m : 2m = 2$ раза.

205. *Алгебраическое решение*. Скорость теплохода x; скорость гидросамолета $10x$. Путь гидросамолета до встречи с теплоходом — s; за то же время путь теплохода s — 180, следовательно,

$$\frac{s}{10x} = \frac{s - 180}{x}.$$

Умножаем обе части равенства на $10x$ ($x \neq 0$) и получаем $s = 200$ миль.

Арифметическое решение. В то время, за которое гидросамолет делает 10 миль, теплоход удаляется на 1 милю. Таким образом, когда гидросамолет покроет первоначальные 180 миль, теплоход удалится на 18 миль. Пока гидросамолет делает следующие 10 миль, теплоход пройдет девятнадцатую милю, и между ними останется 9 миль. На двадцатой миле гидросамолет догонит теплоход. При этом от берега они оба удалятся на расстояние 200 миль.

206. Зная скорости движения велосипедистов, можно заключить, что одну условную единицу длины они делают соответственно в $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{12}$ и $\frac{1}{15}$ часа. Но на один круг каждому из них нужна только $\frac{1}{3}$ указанного времени, то есть $\frac{1}{18}$, $\frac{1}{27}$, $\frac{1}{36}$ и $\frac{1}{45}$ часа (длина окружности каждого круга составляет $\frac{1}{3}$ условной единицы длины). За час велосипедисты сделают 18, 27, 36 и 45 полных оборотов, а за 20 минут — 6, 9, 12 и 15 оборотов. Все числа — целые, следовательно, по истечении 20 минут велосипедисты сойдутся в исходных точках. Вообще велосипедисты могут сходиться в исходных точках только через такие общие для всех промежутки времени, по истечении которых они делают целые (хотя и неодинаковые) числа оборотов. Наибольшее возможное число встреч велосипедистов на протяжении 20 минут определится, следовательно, величиной общего наибольшего делителя чисел 6, 9, 12 и 15. Общий наибольший делитель для этих чисел равен 3. Следовательно, в течение 20 минут велосипедисты будут сходиться 3 раза, через каждые $6\,^2\!/_3$ минуты ($20 : 3 = 6\,^2\!/_3$).

207. Расстояние от Скагуэя до лагеря, куда спешил Джек Лондон, составляет $133\,^1\!/_3$ мили.

Действительно, в условии задачи сказано, что 50 миль, пройденные с полной скоростью, ускорили бы прибытие Джека Лондона в лагерь на один день. Следовательно, 100 миль, пройденные с полной скоростью, ускорили бы его прибытие на два дня, и Джек Лондон прибыл бы в лагерь без опоздания. Из этого можем заключить, что к концу первого дня пути до лагеря оставалось еще 100 миль. Если бы Джек Лондон все время передвигался с полной скоростью, он вместо 100 миль сделал бы $\frac{100 \times 5}{3} = 166^2\!/_3$ мили. Лишние $66^2\!/_3$ мили сэкономили бы ему два дня пути. Отсюда вытекает, что полная, заранее рассчитанная Лондоном скорость равнялась $33^1\!/_3$ мили в день. В первые сутки он и проехал $33^1\!/_3$ мили.

Прибавив к этому оставшиеся 100 миль, найдем искомое расстояние. Оно будет: $100 + 33^1\!/_3 = 133^1\!/_3$ мили.

208. **1**. Если ежемесячный заработок увеличился на 30%, то и покупательная способность повысилась на столько же.

2. Если же заработок остается неизменным, но понижаются цены на товары на 30%, то покупательная способность поднимается не на 30%, как многие думают, а больше. В самом деле, если, скажем, на 100 рублей можно купить 1 предмет стоимостью 100 рублей, то после снижения его стоимости до 70 рублей (на 30%) на 100 рублей можно купить $\frac{100}{70} = \frac{10}{70}$ предмета, то есть на $^3\!/_7$ предмета больше, а $^3\!/_7$ — это примерно 43%.

3. Незаконная аналогия и здесь может привести к ошибочному ответу: 10 + 8 = 18%. В действительности первоначально предполагавшаяся прибыль — 20%.

В самом деле, продавая книгу со скидкой 10%, магазин получал 8% прибыли. Это значит, что 90% от назначенной цены составляют 108% себестоимости книги.

Нетрудно определить, сколько процентов себестоимости книги составляла бы вся назначенная цена.

Для решения этого вопроса составляем пропорцию:

$$\frac{90}{100} = \frac{108}{x}.$$

Отсюда $x = 120\%$. Значит, первоначально предполагавшаяся прибыль — 20%.

4. Очень многие думают, что на сколько процентов сокращается время изготовления детали, на столько же процентов должна увеличиваться производительность труда. Легко показать, что это заблуждение.

Пусть на изготовление одной детали расходуется 1 час. После сокращения расходуемого времени на $p\%$ оно будет на $\frac{p}{100}$ часа меньше, то есть будет составлять $1 - \frac{p}{100}$ часа. Значит, за 1 час будет изготовлена не одна деталь, а $1 : (1 - \frac{p}{100}) = \frac{100}{100 - p}$ деталей, или на $\frac{100}{100 - p} - 1 = \frac{p}{100 - p}$ деталей больше.

Если этот прирост продукции выразить в процентах, то получится $\frac{100p}{100 - p}$ %. Так, если, например, норма времени сокращена на 50% ($p = 50$), то производительность труда возрастет не на 50%, а на 100%, то есть удвоится.

209. Если существенной стороной воли завещателя считать отношение доли (m) матери к доле (s) сына и к доле (t) дочери, то из условия следует, что дочь должна получить вдвое меньшую часть наследства, нежели мать, а сын — вдвое большую, чем мать. Значит, наследство должно быть разделено на 7 равных частей, из которых 2 части следует выдать матери, 4 части сыну и 1 часть дочери: $m : s : t = 2 : 4 : 1$.

Так и предложил делить наследство Сальвиан Юлиан. Но такое решение не слишком хорошо для матери. В самом деле, ведь волю завещателя можно истолковать так, что он имел в виду оставить матери *по меньшей мере* $^1/_3$ состояния, а решение римского юриста предоставляет ей только $^2/_7$ наследства. Поэтому, если встать на защиту интересов матери, то следует отдать ей $^1/_3$ всего наследства, остальные $^2/_3$ наследства разделить между сыном и дочерью в отношении 4:1. Тогда сын получит $\frac{2}{15} \times 4 = \frac{8}{15}$, а дочь $\frac{2}{15} \times 1 = \frac{2}{15}$ всего наследства, или $m : s : t = 5 : 8 : 2$. Из двух возможных решений задачи мы видим, что воля завещателя сформулирована недостаточно четко, так как возможны два толкования.

210. Пусть искомое расстояние равно $2x$ шагов. В одной половине этого расстояния $\frac{x}{2}$ пар шагов; в другой половине $\frac{x}{3}$ троек шагов. По условию пар на 250 больше, чем троек. Следовательно,

$$\frac{x}{2} - \frac{x}{3} = 250, \ \frac{x}{6} = 250, \ x = 1500 \text{ шагов.}$$

Все расстояние $2x = 3000$ шагов.

211. Пусть расстояние от деревни до города равно x км. Если пожилой проехал y км, то ему остается ехать $(x - y)$ км. Если бы он проехал $3y$ км, то ему осталось бы ехать $(x - 3y)$ км.

По условию расстояние $x - 3y$ вдвое меньше расстояния $x - y$. Следовательно,

$$x - y = 2\,(x - 3y), \text{ или } x - y = 2x - 6y.$$

Отсюда

$$y = \frac{1}{5}x.$$

Пусть молодой проехал первоначально z км; остается ему ехать $(x - z)$ км. Если бы он проехал $\frac{z}{2}$ км, то ему осталось бы ехать $(x - \frac{z}{2})$ км. По условию

$$(x - z)\,3 = x - \frac{z}{2}.$$

Отсюда

$$z = \frac{4}{5}x.$$

Но $\frac{4}{5}x$ больше, чем $\frac{1}{5}x$, то есть $z > y$, а это значит, что первоначально молодой проехал больше, чем пожилой.

Следовательно, молодой ехал на машине, а пожилой на лошади.

212. Пусть первый мотоциклист ехал x часов, отдыхал $\frac{y}{3}$ часов; второй мотоциклист отдыхал $\frac{x}{2}$ часов, ехал y часов.

Так как оба мотоциклиста находились в пути одно и то же время, то

$$x + \frac{y}{3} = \frac{x}{2} + y, \text{ или } \frac{x}{2} = \frac{2}{3}y.$$

Отсюда $x = \frac{4}{3}y$, то есть $y < x$.

Второй мотоциклист ехал быстрее первого.

213. Если искомый самолет находится на n-м месте, считая слева направо, то справа от него $9 - n$ самолетов (см. рис. 148), а слева $n - 1$ самолет. Произведение этих чисел: $(9 - n)(n - 1)$. Если бы самолет находился на 3 места правее, то справа от него было бы $6 - n$ самолетов, а слева $n + 2$ самолета. По условию

$$(6 - n)(n + 2) - (9 - n)(n - 1) = 3.$$

Отсюда $n = 3$.

Искомый самолет третий, считая слева направо.

214. Искомые части 8, 12, 5 и 20.

215. Пусть x — длина более длинной свечи, а y — длина короткой. За час первая свеча сгорит на $x : 3\frac{1}{2} = \frac{2}{7}x$, а вторая — на $y : 5 = \frac{1}{5}y$. За 2 часа они сгорят соответственно на $\frac{4}{7}x$ и $\frac{2}{5}y$. От первой свечи останется $\frac{3}{7}x$, а от второй $\frac{3}{5}y$. По условию задачи $\frac{3}{7}x = \frac{3}{5}y$; следовательно, одна свеча была короче другой в $^5/_7$ раза.

216. Все дело в том, что сумма таким образом задуманных чисел всегда будет кратна 11. Действительно, задуманное четырехзначное число [a] [b] [c] [d] можно записать как $1000a + 100b + 10c + d$, а после перестановки первой цифры a в конец числа — как $1000b + 100c + 10d + a$. Сумма этих чисел будет равна:

$$1000a + 100b + 10c + d + 1000b + 100c + 10d + a =$$
$$= 1001a + 1100b + 110c + d.$$

Нетрудно заметить, что каждое слагаемое суммы делится на 11.

Из чисел, названных Колей, Толей, Полей и Олей, только Толин результат делится на 11.

Из этого можно сделать вывод, что Коля, Поля и Оля наверняка ошиблись, а Толин результат может быть правильным.

217. На первый взгляд может показаться, что отставание настенных часов полностью компенсируется убеганием вперед на столько же минут настольных часов. В свою очередь отставание будильника компенсируется убеганием вперед наручных часов, так что наручные часы покажут точное время. Но это не так.

В самом деле, за 1 час точного времени настенные часы делают 58 минут. За 60 минут по настенным часам настольные часы делают 62 минуты. Следовательно, за каждую минуту по настенным часам настольные часы делают $\frac{62}{60}$ минуты, а за 58 минут по настенным часам (то есть за один час точного времени) настольные часы делают $58 \times \frac{62}{60}$ минуты.

Далее. За 60 минут по настольным часам будильник делает 58 минут. Следовательно, за каждую минуту по настольным часам будильник делает $\frac{58}{60}$ минуты, а за $\frac{58 \times 62}{60}$ минуты по настольным часам (то есть за 1 час точного времени) будильник делает $\frac{58 \times 62}{60} \times \frac{58}{60}$ минуты.

Точно так же за каждую минуту по будильнику наручные часы делают $\frac{62}{60}$ минуты. Следовательно, за $\frac{58 \times 62 \times 58}{60\ 60}$ минуты по будильнику (то есть за 1 час точного времени) наручные часы делают $\frac{58 \times 62 \times 58}{60 \times 60} \times \frac{62}{60}$ минуты. Произведя вычисления, получим приближенно 59,86 минуты.

Значит, за каждый час точного времени наручные часы отстают на 0,14 минуты. Таким образом за 7 часов точного времени они отстанут на $0{,}14 \times 7 = 0{,}98 \approx 1$ минута.

В 19 часов точного времени наручные часы покажут 18 часов 59 минут.

218. Пусть наши часы опять покажут одно и то же время через x часов. Это случится тогда, когда мои часы убегут, а Васины отстанут *вместе* на 12 часов (43 200 секунд). Мои часы за x часов отстанут на x секунд, а Васины — на $\frac{3}{2}x$ секунд. Получаем уравнение

$$x + \frac{3}{2}x = 43\,200.$$

Отсюда $x = 17\,280$ часов, или 720 дней.

Почти 2 года пришлось бы ждать мне и Васе, пока наши часы опять показали бы одно и то же время!

Еще дольше пришлось бы ждать совпадения показаний наших часов с сигналом точного времени.

Действительно, для этого мои часы должны убежать вперед на 12 часов, а Васины — отстать на 12 часов.

С моими часами это случилось бы через 43 200 часов, или через 1800 дней, а с Васиными — в $^3/_2$ раза раньше, то есть через 1200 дней. *Одновременное* совпадение показаний моих и Васиных часов с сигналом точного времени произошло бы через число дней, кратное числам 1800 и 1200, то есть через 3600 дней — почти через 10 лет!

219. 1. За время отсутствия мастера стрелки часов в сумме описали полный круг циферблата. Так как минутная стрелка двигается в 12 раз быстрее часовой, то пройденные ими расстояния будут составлять соответственно $\frac{12}{13}$ и $\frac{1}{13}$ всего круга. Отсюда следует, что мастер отсутствовал $\frac{12}{13} \times 60 = 55\frac{5}{13}$ минуты. Если путь, проходимый стрелками, считать в минутах времени и через x обозначить число минут, протекшее от положения обеих стрелок на цифре 12 до положения минутной стрелки в момент ухода мастера на обед, то часовая стрелка за эти x минут продвинется только на $\frac{1}{12}x$, и, значит, в момент ухода мастера «расстояние» между стрелками составит $x - \frac{x}{12} = \frac{11}{12}x$ минуты. Получаем уравнение

$$\frac{11}{12}x = \frac{1}{13} \times 60.$$

Отсюда

$$x = 5\frac{5}{143} \text{ минуты.}$$

Следовательно, ушел мастер на обед в $5\frac{5}{143}$ минуты первого, отсутствовал $55\frac{5}{13}$ минуты.

Когда он вернулся, было $55\frac{5}{13} + 5\frac{5}{143} = 60\frac{60}{143}$ минуты. После двенадцати, то есть $\frac{60}{143}$ минуты второго.

2. Через 2 часа после того, как я ушел гулять, минутная стрелка часов окажется на том же месте, а часовая продвинется на $\frac{2}{12}$ всего циферблата.

Чтобы стрелки часов обменялись положениями больше чем через 2 часа, они совместно должны пройти $^{10}/_{12}$ всего циферблата, или еще 50 минут. Минутная стрелка двигается в 12 раз быстрее часовой, значит, оставшийся ей путь равен $\frac{12}{13} \times 50 = 46\frac{2}{13}$ минуты. Следовательно, сверх двух часов я отсутствовал еще 46 $^{2}/_{3}$ минуты.

3. Между 4 и 5 часами стрелки часов совпадают ровно через $20 : \frac{11}{12} = 21\frac{9}{11}$ минуты после 4. Минутная стрелка окажется против часовой через $50 : \frac{11}{12} = 54\frac{6}{11}$ минуты после 4. Следовательно, школьник решал задачу $54\frac{6}{11} - 21\frac{9}{11} = 32\frac{8}{11}$ минуты.

Закончил он решение задачи в 4 часа $54\frac{6}{11}$ минуты.

220. Из условия задачи следует, что в момент, когда началось совещание, часовая стрелка находилась между шестым и седьмым часовыми делениями циферблата, а минутная — между девятым и десятым делениями (рис. 350).

Примем за единицу угловой путь, проходимый часовой стрелкой в течение часа (то есть путь, соответствующий пяти минутным делениям). Если совещание началось в x часов, то, значит, угловой путь, пройденный часовой стрелкой от ее положения, соответствующего 12 часам, тоже будет x.

Если совещание окончилось в y часов, то угловой путь, пройденный часовой стрелкой от ее начального положения (от 12 часов), тоже будет y. Этот же угловой путь y прошла минутная стрелка за промежуток времени от 6 часов 00 минут (тогда она была на цифре 12) до момента начала совещания. В свою очередь за этот же промежуток времени часовая стрелка (которая движется в 12 раз медленнее) прошла от цифры 6 угловой путь, равный $\frac{y}{12}$. Имеем:

$$x = 6 + \frac{y}{12}.$$

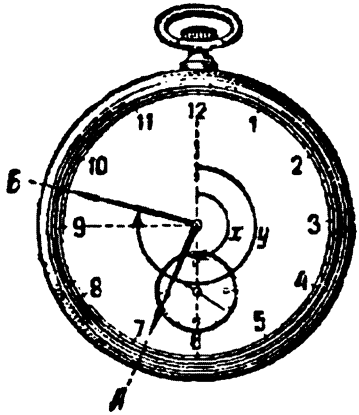


Рис. 350

К моменту окончания совещания стрелки поменялись местами. Рассуждая аналогично, получим:

$$y = 9 + \frac{x}{12}.$$

Решая совместно получившиеся уравнения, находим, что $x = 6\frac{114}{143}$ часа $=$ 6 часов 47 минут; $49\frac{133}{143}$ секунды — время начала совещания; $y = 9\frac{81}{143}$ часа $=$ 9 часов 33 минуты; $59\frac{23}{143}$ секунды — время окончания совещания.

221. Так как первый разведчик половину всего времени шел с большей из двух неравных скоростей, то с большей скоростью он прошел, очевидно, *больше половины пути,* а второй разведчик с такой же скоростью прошел только *половину пути*.

Пусть для определенности начальная скорость каждого разведчика больше измененной скорости. Тогда первую половину пути оба разведчика шли одинаковое время, но вторую половину пути первый разведчик прошел за меньший промежуток времени, чем второй, так как второй шел с уменьшенной скоростью всю вторую половину пути, а первый — только ее часть. Значит, и весь путь прошел первый разведчик за меньший промежуток времени, чем второй. Вот и все решение задачи — краткое и изящное.

Нетрудно и алгебраически обосновать утверждение, что с большей скоростью первый разведчик прошел бóльшую часть пути. Пусть m и n — скорости разведчиков, причем $m > n$, t — половина всего количества времени, затраченного первым разведчиком, s — путь, пройденный им со скоростью m, и s_1 – путь, пройденный им со скоростью n.

При $m > n$ имеем:

$$\frac{s}{t} > \frac{s_1}{t}, \text{ откуда } s > s_1.$$

На языке алгебры продолжить решение можно так:

весь путь:

$$mt + nt;$$

полпути:

$$\frac{mt + nt}{2} = \frac{(m + n)t}{2};$$

полное время x первого разведчика: $x = 2t$; полное время y второго разведчика:

$$y = \frac{(m + n)t}{2m} = \frac{(m + n)t}{2n}.$$

Возьмем разность $y - x$:

$$y - x = \frac{(m + n)t}{2m} + \frac{(m + n)t}{2n} - 2t =$$
$$= \frac{(mn + n^2 + m^2 + mn - 4mn)t}{2mn} = \frac{(m - n)^2 t}{2mn}.$$

Так как все множители в правой части положительны, то $y - x > 0$, или $y > x$. Второй разведчик шел дольше, чем первый.

222. Пусть x — длина поезда, y — его скорость. Так как поезд проходит мимо наблюдателя в t_1 секунд, то есть проходит путь, равный собственной длине x, в t_1 секунд, то $y = x\frac{x}{t_1}$. За t_2 секунд он проходит мост в a метров, то есть проходит это время путь, равный сумме собственной длины и длины моста.

Следовательно, $y = \dfrac{x + a}{t_2}$.

Отсюда $x = \dfrac{at_2}{t_2 - t_1}$; $y = \dfrac{a}{t_2 - t_1}$.

223. Перемножим левые и правые части данных равенств

$$a^2 = bd \text{ и } ad = b^2c.$$

Получим: $a^3d = b^3dc$, или, сокращая на d: $a^3 = b^3c$.

Отсюда следует, что c должно быть кубом некоторого целого числа. Из целых чисел от 2 до 15 есть только одно, являющееся кубом, а именно 8. Значит, $c = 8$. Отсюда имеем $a^3 = 8b^3$, или $a = 2b$.

Так как по условию $a^2 = bd$, то $4b^2 = bd$, или $4b = d$. Но b не может быть равно 2, так как тогда $d = 8$, но у нас уже $c = 8$, а среди данных слов нет двух по 8 букв, и b не может быть больше 3, так как среди данных слов нет слов с 16 буквами и больше. Следовательно, $b = 3$. Отсюда $a = 6$ и $d = 12$. Итак, избранные слова имеют 6, 3, 8 и 12 букв. Такими словами из числа данных будут: задача, куб, величина, пятиугольник.

224. Извлекая квадратный корень из обеих частей равенства

$$(x - v)^2 = (y - v)^2,$$

любитель алгебраических преобразований упустил из виду два возможных результата: либо $x - v = y - v$, либо $x - v = v - y$. Верный же из них — только второй, и вот почему. Так как x и y — числа положительные, то из исходного равенства $x + y = 2v$ следует, что если $x > v$, то $y < v$ (первый случай), и если $x < v$, то $y > v$ (второй случай).

В первом случае $x - v > 0$, а $y - v < 0$, следовательно, равенство $x - v = y - v$ не может быть верным (положительное число не может быть равно отрицательному).

Во втором случае $x - v < 0$, а $y - v > 0$, что опять ни подтверждает справедливости равенства $x - v = y - v$. Второе же равенство $x - v = v - y$ не противоречит условиям ни первого, ни второго случаев. Приняв это равенство, наш любитель избежал бы ошибки, но... и не получил бы, как и следовало ожидать, никакого нового результата. Из равенства $x - v = v - y$ снова следовало бы исходное равенство $x + y = 2v$.

225. Приписывая 1 впереди пятизначного числа $[A]$, очевидно, мы его увеличиваем на 100 000. Так что $[1]\ [A]$ это есть $A + 100\,000$. Если же мы приписываем 1 в конце числа A, то это равносильно умножению его на 10 и прибавлению единицы к этому произведению. Так что $[A]\ [1]$ это есть $A \times 10 + 1$.

Из условия задачи следует, что

$$\frac{10A + 1}{A + 100\,000} = 3.$$

Отсюда $10A + 1 = 3A + 300\,000$, или $7A = 299\,999$ и, наконец, $A = 42\,857$.

226. Если мой возраст изобразить отрезком AB (рис. 351), а ваш — отрезком CD, то отрезок KB покажет, сколько лет назад мой возраст был равен вашему. Но столько лет назад ваш возраст был меньше на отрезок $ND = KB$ и выражался отрезком CN, который в два раза меньше отрезка AB. Отсюда следует, что и отрезок MB содержит в себе два раза отрезок KB; отрезок AB содержит четыре раза отрезок KB, а CD — три раза.

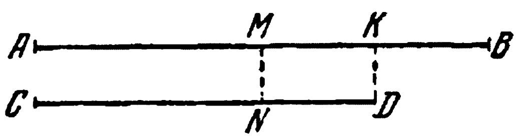


Рис. 351

Когда вам будет столько лет, сколько мне теперь, то ваш возраст изобразится отрезком, равным отрезку AB, который, как установлено, содержит четыре раза отрезок KB. Но и мой возраст за это время увеличится на отрезок KB и будет изображаться отрезком, содержащим пять раз отрезок KB.

По условию $4KB + 5KB = 63$, то есть отрезок KB изображает 7 лет. Значит, в настоящее время вам 21 год, а мне 28 лет. Семь лет назад вам было 14 лет, что действительно составляет половину моего настоящего возраста.

227. Часто дают неправильный ответ, например 7. Это объясняется тем, что, имея в виду те пароходы, которые должны еще отправиться в путь, забывают о тех, которые уже в дороге. Очень убедительное и наглядное решение можно получить при помощи графиков движения каждого из пароходов (рис. 352).

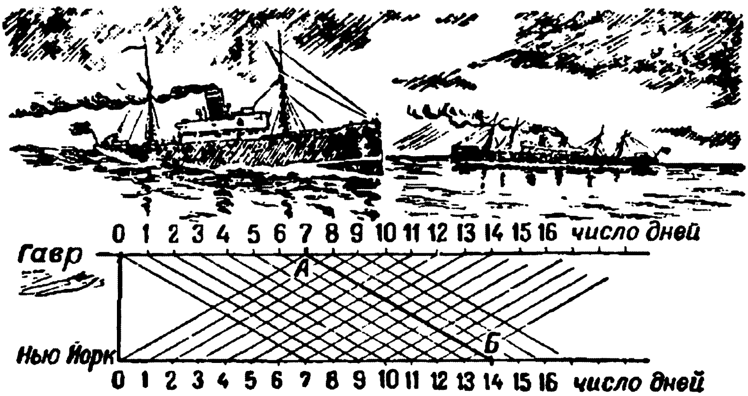


Рис. 352

На примере парохода, график которого изображен линией *АБ*, видно, что пароход, идущий из Гавра в Нью-Йорк, встретит в море 13 судов да еще 2: один в момент отхода (прибывший из Нью-Йорка) и один в момент прихода в Нью-Йорк (отбывающий из Нью-Йорка), или всего 15 судов. График показывает также и то, что встречи пароходов будут происходить ежедневно в полдень и в полночь.

228. И здесь для решения и анализа задачи удобен графический способ. По вертикальной оси (рис. 353, *а*) откладываем расстояния (в километрах), а по горизонтальной — моменты времени (в часах). Масштабы произвольные.

Если весь путь совершается на велосипеде (по 15 км/час), то, как показывает конечная точка *A* графика *OA*, требуется для этого 4 часа. Если же весь путь совершается пешком (без остановок, по 5 км/час), то, как показывает точка *B* графика *OB*, требуется для этого 12 часов. Но оба мальчика двигались попеременно пешком и на велосипеде и закончили свой путь одновременно, следовательно, графики их движений должны иметь общую конечную точку.

В условии задачи не сказано, сколько раз меняли мальчики способ своего передвижения. Предположим, по одному разу. В этом случае графики их движений должны образовать параллелограмм.

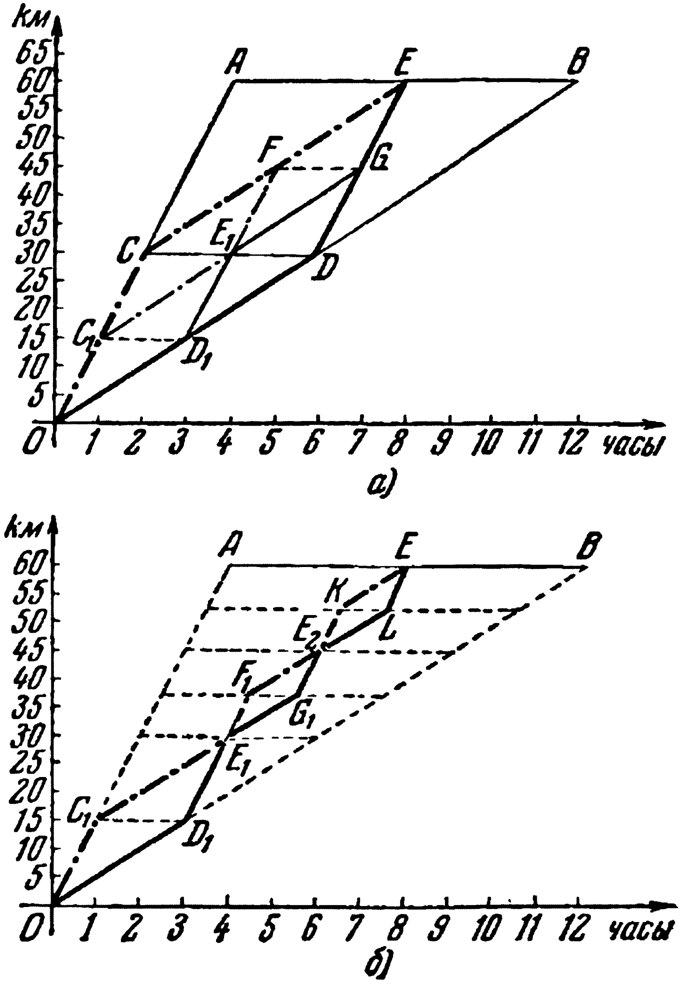


Рис. 353

В самом деле, пусть график OC движения велосипедиста сменился в некоторой точке C графиком CE, характеризующим пешеходное движение и, следовательно, параллельным OB.

График OD движения второго мальчика при перемене пешеходного движения на велосипедное «переламывается» в такой точке D, которая находится на одном уровне с точкой C относительно горизонтальной оси, так как этот мальчик должен дойти пешком до того места, где товарищ оставил ему велосипед (то есть пройти такой же путь, какой проехал на велосипеде первый мальчик). Остальную часть пути второй мальчик едет на велосипеде, следовательно, отрезок DE графика его движения на велосипеде параллелен OA.

Итак, фигура $OCED$ — параллелограмм. Фигура $CDBE$ — также параллелограмм ($CE||DB$ и $CD||BE$).

Сопоставляя стороны параллелограммов, получаем: $OD = CE$ и $CE = DB$. Отсюда $OD = DB$.

Следовательно, точки D и C соответствуют середине всего пути. В этом случае смена способа передвижения происходит только один раз на расстоянии 30 км от конечной цели путешествия мальчиков. Точка E будет серединой отрезка AB и показывает, что при избранном мальчиками способе передвижения на весь путь им потребуется только 8 часов вместо 12 в случае, если бы весь путь они оба прошли пешком.

Но смена способов передвижения может произойти и не один раз. По условию задачи мальчик, едущий на велосипеде, догнав товарища, уступает ему велосипед, а сам продолжает путь пешком. Момент такой передачи велосипеда одним мальчиком другому характеризуется на нашей диаграмме точкой встречи графиков движения. Очевидно, что такой точкой, аналогичной точке E, может быть и точка E_1 — середина отрезка CD.

Повторяя рассуждения, аналогичные предыдущим, можно получить, например, следующие графики движения: OC_1E_1FE для первого мальчика и OD_1E_1GE для второго мальчика. В этом случае перемена способа передвижения в последний раз происходит в 15 км от конечного пункта прогулки мальчиков (на рис. 353, *а* уровень *FG*).

Легко понять теперь, что графики движения мальчиков можно разнообразить.

Так, например, после встречи мальчиков, соответствующей моменту E_1 (рис. 353, *б*), можно предложить им такие графики движения: $E_1F_1E_2KE$ для первого мальчика и $E_1G_1E_2L$ для второго. В этом случае последняя перемена способа передвижения мальчиков произойдет еще ближе к конечному пункту их прогулки, всего лишь в $7\frac{1}{2}$ км от него (на рис. 353, *б* уровень *KL*).

Условие задачи, как видите, допускает бесчисленное множество вариантов графиков движения мальчиков, и в этом смысле задача недостаточно определена. Но один ответ остается вполне определенным. Сколько бы раз мальчики ни меняли способ своего передвижения, весь их путь будет продолжаться ровно 8 часов.

229. Примеров можно взять сколько угодно. Но примерами все-таки не докажешь общности свойств. Для этой цели незаменима *алгебра* с ее правилами действий над буквами, где под каждой буквой в случае необходимости или возможности подразумевается *любое число*.

Пусть $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \frac{a_3}{b_3}, \ldots, \frac{a_n}{b_n},$ — данные дроби, числители и знаменатели которых — произвольные положительные числа. Будем считать, что они у нас расположены в порядке возрастания, так что самой меньшей дробью будет $\frac{a_1}{b_1},$ а самой большей $\frac{a_n}{b_n}.$ Требуется доказать, что

$$\frac{a_1}{b_1}<\frac{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n}{b_1+b_2+b_3+\ldots+b_n}<\frac{a_n}{b_n}.$$

Имеем:

$$\frac{a_2}{b_2}>\frac{a_1}{b_1} \text{ или } a_2>b_2\frac{a_1}{b_1},$$

$$\frac{a_3}{b_3}>\frac{a_1}{b_1} \text{ или } a_3>b_3\frac{a_1}{b_1},$$

....

$$\frac{a_n}{b_n} > \frac{a_1}{b_1} \text{ или } a_n > b_n \frac{a_1}{b_1}.$$

Отсюда

$$a_2 + a_3 + \dots + a_n > (b_2 + b_3 + \dots + b_n)\ \frac{a_1}{b_1}.$$

Прибавим к левой части этого неравенства a_1, а к правой $b_1 \times \frac{a_1}{b_1}$, тогда

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n > (b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n) \frac{a_1}{b_1}.$$

Отсюда

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n}{(b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n)} > \frac{a_1}{b_1}.$$

Аналогично доказывается и вторая часть теоремы, то есть что

$$\frac{n_1 + n_2 + n_3 + \dots + a_n}{b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n} < \frac{a_n}{b_n}.$$

К главе IX

230. Четыре ботинка и три носка. Среди четырех ботинок, взятых из шкафа, два обязательно будут одного фасона; среди трех носков два будут одного цвета.

Если же взять только два или три ботинка, то может случиться так, что они все окажутся разных фасонов, и если взять только два носка, то эти носки могут оказаться разной окраски.

231. 1) Четыре яблока; 2) семь яблок.

232. Нельзя, так как через 72 часа, то есть через трое суток, будет опять полночь, а солнце ночью не светит (если дело не происходит за полярным кругом в полярный день).

233. Шестиклассники перевыполнили свое задание на 5 деревьев, а поэтому пятиклассники недовыполнили свое задание на 5 деревьев.

Следовательно, старшие посадили на 10 деревьев больше, чем младшие.

234. 1) Фамилия Пети не Гриднев (это противоречило бы п. 3 условия).

2) Мать Бурова — родная сестра Серова (п. 1 условия), то есть ее девичья фамилия — Серова; но дедушка Пети — Мокроусов (п. 2 условия); значит, он отец Петиной матери, а не его отца, так как отец Пети — или Буров, или Клименко (см. п. 1 решения). Следовательно, мать Бурова и мать Пети — не одно и то же лицо.

Этим устанавливается, что Буров — не Петя. Но Буров — и не Коля, как это выяснилось в самом начале разговора вожатого с ребятами.

Если же Буров — не Петя и не Коля, значит, его имя — Гриша.

3) Если Буров — Гриша, значит, Гриднев — не Гриша, но он — и не Петя (см. п. 1 решения). Следовательно, Гриднев — Коля, а Клименко — Петя.

4) Петя в этом году начнет изучать алгебру, геометрию и физику (п. 2 условия), значит, он будет учиться в седьмом классе средней школы, а в первый класс он пошел в шесть лет, следовательно, ему в настоящее время 12 лет (разумеется, так как он учится отлично, то он не оставался ни в одном классе на второй год).

5) По условию Гриднев и Гриша старше Пети на 1 год (п. 3 и п. 4 условия), значит, Гридневу и Бурову по 13 лет.

Окончательно:

Буров Гриша, 13 лет,
Гриднев Коля, 13 лет,
Клименко Петя, 12 лет.

235. Сначала нужно выписать оценки (числа очков) всех 18 выстрелов, затем распределить их в три ряда (по шесть чисел в каждом) так, чтобы сумма чисел в каждом ряду дала 71 очко.

Возможен только один вариант такого распределения, а именно:

ряд № 1 — 25, 20, 20, 3, 2, 1 — всего 71 очко;
ряд № 2 — 25, 20, 10, 10, 5, 1 — всего 71 очко;
ряд № 3 — 50, 10, 5, 3, 2, 1 — всего 71 очко.

Так как Андрюше первые два выстрела дали 22 очка, то ему и принадлежит ряд № 1, поскольку только в этом ряду имеются два числа, дающих в сумме 22.

Володе первый выстрел дал 3 очка, значит, ему принадлежит ряд № 3 (во втором ряду нет числа 3). В этом ряду и находится число 50.

Следовательно, в яблочко попал Володя. Ряд № 2, очевидно, принадлежит Боре.

236. Задачи такого рода решаются методом исключения. Перечислим факты, содержащиеся в условии:

1) А и москвич — врачи.
2) Д и петербуржец— учителя.
3) В и туляк — инженеры.
4) Б и *Е* — брюнеты, а туляк лысый.
5) Харьковчанин старше *А*.
6) Одессит старше *В*.
7) Б и москвич сошли в Киеве.
8) В и харьковчанин сошли и Виннице.

Из этих фактов, как логические следствия, выявляются скрытые факты.

Например, из фактов (1) и (2) следует, что *А* — не москвич (1), но *А* — и не петербуржец (1–2); *Д* — не петербуржец (2), но *Д* — и не москвич (1–2) и т. п.

Составим таблицу всех основных и выведенных фактов, относящихся к нашим пассажирам, помещая в соответствующих клетках таблицы номера условий, из которых следует исключение возможности данного сочетания:

Из таблицы сразу следует, что *В* — киевлянин (отмечаем звездочкой). Остальные пассажиры — не киевляне (ставим «минусы» в свободных клетках строки «киевлянин»).

	А	Б	В	Г	Д	Е
Москвич	1	7	7–8 1–3	–	1 2	*
Ленинградец	1–2	*	2–3	–	2	–
Киевлянин	–	–	*	–	–	–
Туляк	1–3	4	3	*	2–3	4
Одессит	*	–	6	–	–	–
Харьковчанин	5	7–8	8	–	*	–

Тотчас выясняется местожительство *А*. Пассажир *А* — одессит. Ставим в соответствующей клетке таблицы звездочку; в остальных свободных клетках этой строки проставляем «минусы».

Продолжая этот прием, устанавливаем окончательно: *А* — одессит, *Б* — петербуржец, *В* — киевлянин, *Г* — туляк, *Д* — харьковчанин, *Е* — москвич.

Теперь легко определяются и специальности пассажиров: *А* и *Е* — врачи, *Б* и *Д* — учителя, *В* и *Г* — инженеры.

Дополнительное замечание. Таблица показывает, что всего из условия задачи было почерпнуто 17 фактов. Достаточность этого количества фактов следует из того, что задача все-таки решена и в процессе решения не было никаких противоречий. Но все ли 17 фактов необходимы для решения задачи? Очевидно, нет, так как два факта, например, подтверждают, что *В* — не москвич.

Какое же количество фактов необходимо?

Так как каждый пассажир будет жителем одного из шести городов, то для установления методом исключения местожительства первого пассажира необходимо пять фактов, указывающих, в каких пяти городах он не живет.

После этого для установления местожительства второго пассажира необходимо и достаточно располагать только четырьмя фактами того же типа и т. д.

Всего, следовательно, для наиболее экономного построения задачи о шести пассажирах и для ее решения необходимо и достаточно иметь 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15 фактов указанного типа.

В нашей задаче два факта — лишние.

237. Удобно эту задачу решать таким же способом, как и предыдущую. Перечислим факты, содержащиеся в условии.

1) В первом туре полковник играл с водителем.
2) В первом туре летчик не играл.
3) Во втором туре пехотинец играл с ефрейтором.
4) Во втором туре майор играл с прапорщиком.
5) После второго тура капитан выбыл из турнира.
6) Из-за этого в третьем туре вышел сержант.
7) В четвертом туре — танкист.
8) В пятом туре — майор.
9) В третьем туре лейтенант играл с пехотинцем.
10) В третьем туре полковник играл с разведчиком.
11) В четвертом туре сапер играл с лейтенантом.
12) В четвертом туре прапорщик играл с полковником.
13) После шестого тура доигрывалась партия кавалериста с огнеметчиком.

Составим и заполним по тому же принципу, как и в предыдущей задаче, таблицу участников турнира в сочетании с их специальностями.

Звездочки в таблице указывают специальности участников турнира. В таблице зарегистрировано 28 фактов, выявленных из условия задачи, а количество фактов, необходимых для решения данной задачи, также равно 28 (7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1= = 28). Следовательно, лишних данных условие задачи не содержит.

238. При распиловке метровых кругляков на полуметровые дрова количество отрезков должно быть кратно 2. При распиловке полутораметровых количество отрезков кратно 3, а при распиловке двухметровых — кратно 4.

	Пехотинец	Летчик	Танкист	Артиллерист	Кавалерист	Минометчик	Сапер	Связист
Полковник	9-10	1-2	7-12	10	1	1-13	11-12	*
Майор	3-4	—	7-8	*	—	—	—	—
Капитан	5-9	*	5-7	5-10	5-13	5-13	5-11	—
Лейтенант	9	—	7-11	9-10	*	—	11	—
Старшина	3-4	—	7-12	10-12	1-12	*	11-12	—
Сержант	6-9	—	6-7	6-10	—	—	*	—
Ефрейтор	3	—	*	—	—	—	—	—
Солдат	*	—	—	—	—	—	—	—

Лавров и Котов напилили 26 отрезков (кратно 2).

Галкин и Пастухов — 27 (кратно 3).

Медведев с Евдокимовым — 28 (кратно 4).

Следовательно, полутораметровые дрова пилили Галкин и Пастухов, которых по условию задачи звали Петей и Костей, но Петя — старший, а Пастухов — нет. Значит, Пастухов — Костя.

239. Известно, что проводник живет точно на полпути от Москвы до Санкт-Петербурга (2). Один из пассажиров живет в Москве (1), другой — в Санкт-Петербурге (3), значит, ни тот ни другой не могут считаться ближайшими соседями проводника по месту его жительства (4). Следовательно, ближайший сосед проводника — не Иванов (1) и не Петров (5), месячный заработок которого не делится ровно на 3 (4), а Сидоров. В таком случае проводник — не Сидоров (3). Начальник поезда — тоже не Сидоров (6). По методу исключения Сидоров — *машинист*.

Нетрудно теперь определить и фамилии остальных членов поездной бригады. Так как пассажир Иванов живет в Москве, а пассажир Сидоров — ближе к середине пути Москва — Санкт-Петербург, то, очевидно, пассажир Петров живет в Санкт-Петербурге (3). Следовательно, фамилия проводника — Петров (3). Фамилия начальника поезда — Иванов.

240. Рассуждения могут быть проведены, например, в такой последовательности. Если (3) верно, тогда и (10) и (12) — ложь, а это невозможно по условию. Следовательно, (3) — ложь (то есть кошелек украл не Тео). Так как (3) — ложь, то и (9) — ложь. Так как (9) — ложь, то (8) — верно. Так как (8) — верно, то (15) — ложь. Если (15) — ложь, то (14) — верно. Следовательно, виновна Джуди.

241. В частном пять цифр, а произведений под делимым подписано только три. Следовательно, два из пяти цифр частного должны быть нулями. Судя по произведениям, это не первая и не последняя цифра частного. Значит, нули — вторая и четвертая цифры, прикрытые белым и черным слонами. Далее, когда двузначный делитель умножается на 8, то получается двузначное произведение, но когда делитель умножается на число, скрытое в частном под белой ладьей, то получается трехзначное произведение. Следовательно, число, закрытое белой ладьей, должно быть больше 8 — очевидно, 9. Последнее число частного при умножении на делитель тоже дает трехзначное произведение, следовательно, последняя цифра частного, как и первая, равна 9. Частное определилось полностью: 90 809.

Найдем теперь делитель. Произведение его на 8 дает двузначное число, а произведение его на 9 дает трехзначное число. Единственное двузначное число, отвечающее этому требованию, — 12, так как $12 \times 8 = 96$, а $12 \times 9 = 108$. Итак, делитель — 12. Умножая делитель (12) на частное (90 809) и прибавляя остаток 1, получим делимое, равное 1 089 709.

242. **Первый ребус.** Рассмотрим сначала произведение числа ABC (четвертая строка). Последняя цифра этого произведения — A, следовательно, она не 1, так как в противном случае и C было бы 1, но разные буквы по условию соответствуют неодинаковым цифрам.

Замечаем также, что A не больше 3, так как в противном случае рассматриваемое произведение содержало бы более трех цифр, а рисунок показывает, что оно трехзначное. Следовательно, A может быть только числом 2 или числом 3.

Пусть $A = 3$. Каким должно быть C, чтобы произведение 3 на C оканчивалось цифрой 3? Этому условию удовлетворяет только $C = 1$ $(3 \times 1 = 3)$. Но C не может быть единицей, так как произведение числа ABC на C — число четырехзначное (третья строка). Следовательно, A не равно 3, но тогда $A = 2$. Снова поищем C такое, чтобы произведение $2C$ оканчивалось цифрой 2. Единственно возможнее значение для C — число 6.

Теперь рассмотрим произведение числа $2B6$ на B (пятая строка). Последняя цифра этого произведения равна B; она же получается в результате умножения 6 на B. Для B возможны три значения: 4, 6 и 8, но $246 \times 4 = 984$ — число трехзначное, а произведение должно быть четырехзначным; значение 6 тоже отпадает, так как $C = 6$. Следовательно, $B = 8$. Итак, $ABC = 286$ и $BAC = 826$.

Второй ребус. 1) Так как от умножения трехзначного числа на 2 получается четырехзначное число (четвертая строка), а в третьей и пятой строках числа трехзначные, то оба крайних числа второй строки должны быть меньше 2, значит, оба они равны 1.

Таким образом, множитель равен 121.

2) Так как пятая строка получается от умножения множимого на 1, то имеющаяся в пятой строке цифра 8 показывает, что вторая цифра множимого (первая строка) равна 8, а следовательно, и вторая цифра третьей строки — тоже 8 (третья строка получается от умножения первой строки на 1). Итак, имеем:

$$\begin{array}{cccccc}
 & & \times & * & 8 & * \\
 & & & 1 & 2 & 1 \\
\hline
 & & & * & 8 & * \\
+ & * & * & * & * & \\
 & * & 8 & * & & \\
\hline
* & * & 9 & * & 2 & *
\end{array}$$

3) Первая цифра первой строки больше 4, иначе четвертая строка не могла бы быть четырехзначным числом, но если бы первой цифрой первой строки была даже 9, то все равно первая цифра четвертой строки не больше 1. Очевидно также, что последняя цифра четвертой строки 4 (сумма должна оканчиваться цифрой 2; см. шестую строку).

4) Теперь ясно, что первая цифра шестой строки может быть только 1, а первая цифра пятой (следовательно, также третьей и первой строк) — или 8, или 9, иначе шестая строка не будет шестизначным числом:

$$\begin{array}{rcccccc}
 & & & & * & 8 & * \\
\times & & & & 1 & 2 & 1 \\
\hline
 & & & & * & 8 & * \\
+ & & & 1 & * & * & 4 \\
 & & * & 8 & * & & \\
\hline
 & * & * & 9 & * & 2 & *
\end{array}$$

5) Так как последняя цифра четвертой строки равна 4 (см. п. 3), то последняя цифра первой, третьей и пятой строк — или 2, или 7.

6) Третья цифра четвертой строки — или 6, или 7, так как является последней цифрой произведения 2×8, в крайнем случае увеличенного на 1. Вторая цифра четвертой строки — или 7, или 9 в зависимости от того, будет ли первая цифра первой строки 8 или 9 (см. п. 4). Если бы второй цифрой четвертой строки была цифра 7, то столбец, в котором она находится $(7 + 8)$, пришлось бы дополнять числом 4, чтобы обеспечить соответствующую этому столбцу цифру 9, указанную в произведении, но сумма трех чисел третьего столбца (даже если бы они все были девятками) не может дать больше двух единиц следующего разряда (наибольшее возможное ее значение 28).

Следовательно, второй цифрой четвертой строки будет цифра 9.

7) Из условий 6 и 4 следует, что первой цифрой первой строки (значит, и третьей и пятой строк) может быть только цифра 9:

$$\begin{array}{r}
98{*} \\
\times\ 121 \\ \hline
98{*} \\
19{*}4 \\
+\ 98{*} \\ \hline
{*}{*}9{*}2{*}
\end{array}$$

8) Так как последняя неизвестная цифра множимого определяет все остальные цифры произведения, то ясно, что третья цифра первой строки — не 2, а 7 (см. п. 5). Если бы последняя цифра первой строки была 2, то это не обеспечило бы 9 в качестве третьей цифры шестой строки.

Так оказалось возможным восстановить все зашифрованные цифры. Окончательный результат:

$$987 \times 121 = 119\,427.$$

Третий ребус. 3125 : 25 = 125.

Четвертый ребус. 7 375 428 413 : 125 473 = 58 781.

Пятый ребус. 1 337 174 : 943 = 1418,
или 1 202 464 : 848 = 1418,
или 1 343 784 : 949 = 1416,
или 1 200 474 : 846 = 1419.

Шестой ребус. 1 091 889 708:12 = 90 990 809.

Седьмой ребус. *DOREMIFASOL* =

$$= \begin{cases} 34\,569\,072\,14 & \text{или} \\ 23\,679\,048\,135. \end{cases}$$

Восьмой ребус. *ATOM* = 9376.

243. Мотоциклист находился в пути на 20 минут меньше, чем ему обычно требовалось для того, чтобы проделать путь до аэродрома и обратно. Экономия во времени произошла за счет того, что мотоциклисту в этот раз не пришлось доезжать до аэродрома. Эти 20 минут он затратил бы от места встречи с верховым до аэродрома и обратно. Следовательно, чтобы проехать этот путь в один конец, например от места встречи с верховым до аэродрома, мотоциклисту потребовалось бы 10 минут.

Но мы знаем, что мотоциклист встретился с верховым после того, как тот пробыл в пути 30 минут, то есть спустя полчаса после прибытия самолета. А так как мотоциклист выехал из почтового отделения вовремя, то, следовательно, прибавив к этим 30 минутам те 10, которые необходимы мотоциклисту, чтобы добраться до аэродрома, мы устанавливаем, что самолет прибыл на аэродром на 40 минут раньше установленного срока.

244. Рассуждении аналогичны предыдущим. Автомобиль вернулся на завод на 10 минут раньше обычного, потому что не добрался до станции. Это — те 10 минут, в течение которых автомобиль должен был проделать путь от места встречи с инженером до станции и обратно. Следовательно, чтобы проделать путь в один конец, например от станции до места встречи с инженером, автомобилю потребовалось бы 5 минут. А чтобы пройти это расстояние пешком, инженер затратил 25 минут (30 минут, на которые он раньше приехал, минус 5 минут). Значит, в момент встречи инженера с автомобилем было 8 часов 25 минут; а пешком инженер идет медленнее, чем едет на автомобиле, в пять раз.

245. 1. Предположим, что ни один из сомножителей не больше 8. Тогда возможны три случая: а) каждый сомножитель равен 8; б) один из сомножителей равен 8, другой меньше 8; в) оба сомножителя меньше 8. Легко увидеть, что в каждом из этих случаев произведение меньше 75, что противоречит условию. Следовательно, по крайней мере один из сомножителей больше 8.

2. Предположим, что первая цифра отлична от 1. Тогда она не менее 2, а само число не менее 20. Однако произведение 20 на 5 равно 100, значит, произведение рассматриваемого двузначного числа на 5 не меньше 100, то есть не будет числом двузначным, что противоречит условию. Следовательно, первая цифра данного двузначного числа есть 1.

246. 1. Разбиваем девять монет на три равные группы и кладем по три монеты на каждую чашку весов (*первое взвешивание*); третью группу оставляем в стороне. Возможны два случая.

Первый случай. Весы остаются в равновесии; тогда искомая монета — в числе оставленных в стороне. Выбираем из этих трех оставленных монет любые две и кладем по одной на каждую чашку весов (*второе взвешивание*). Если теперь равновесия не будет, то чашка с фальшивой (более легкой) монетой пойдет вверх; если же весы останутся в равновесии, то искомая монета — третья, не попавшая на весы.

Второй случай. Равновесия нет; следовательно, искомая монета — на той чашке, которая пошла вверх. Таким образом, и в этом случае первое же взвешивание определяет тройку монет, среди которых — искомая. Вторым взвешиванием (так же, как и в первом случае) выделяем искомую монету.

2. Решается аналогично первой задаче. Дополнительная трудность здесь в том, что нужно догадаться разбить данные восемь монет на неравные группы: две группы по три монеты в каждой и одна группа в две монеты. Кладем на весы первые две группы — по три монеты на каждую чашку весов (*первое взвешивание*). Если весы останутся в равновесии, то искомая монета — среди оставшихся двух, и ее, как более легкую, сразу выделим вторым взвешиванием. Если же весы не останутся в равновесии, то фальшивая монета — на той чашке весов, которая пошла вверх. Выбираем теперь из этих монет любые две и кладем по одной на каждую чашку весов (*второе взвешивание*). Если равновесия не будет, то опять-таки чашка с фальшивой монетой пойдет вверх; если же весы останутся в равновесии, то искомая монета — третья, не попавшая на весы.

3. Вся трудность в том, что относительно фальшивой монеты не известно заранее, легче она или тяжелее настоящих. Поэтому здесь, разделяя монеты на три группы по четыре монеты в каждой, необходимо их индивидуализировать, например, пронумеровать. На одну чашку весов положим первую группу монет, имеющих, скажем, номера 1, 2, 3 и 4, а на вторую чашку весов — вторую группу монет с номерами 5, 6, 7 и 8 (*первое взвешивание*). Возможны два случая.

Случай А. Весы в равновесии. Следовательно, фальшивая монета — среди третьей группы монет с номерами 9, 10, 11 и 12.

Сравним теперь вес трех из них, например № 9, № 10 и № 11, с монетами № 1, № 2 и № 3 (*второе взвешивание*). Если весы останутся в равновесии, то фальшивая монета — № 12, и сравнивая ее, например, с № 1, о которой стало известно, что она — настоящая (*третье взвешивание*), определяем, будет ли фальшивая монета тяжелее настоящей или легче. Если же второе взвешивание не даст равновесия, то фальшивая монета или № 9, или № 10, или № 11, причем по положению чашки весов с этими монетами сразу же выясняется, какая она — более тяжелая или более легкая. Допустим, перетянула чашка с монетами № 9, № 10, № 11. Значит, фальшивая — более тяжелая. Чтобы выделить ее из этих трех номеров, достаточно еще одного (третьего) взвешивания. Для этого положим на весы монеты № 9 и № 10. Тогда либо фальшивая перетянет, либо она под № 11.

Случай Б. Первое взвешивание не привело к равновесию. Перетянула, скажем, чашка с монетами № 1, № 2, № 3 и № 4. Тогда либо искомая монета среди № 1, № 2, № 3 и № 4 и более тяжелая, либо среди № 5, № 6, № 7 и № 8 и более легкая. Становится известным при этом, что монеты третьей группы под № 9, № 10, № 11 и № 12 — настоящие. *Вторым взвешиванием* сравним монеты № 9, № 10, № 11 и № 5 (три настоящие и одну из группы более легких) с монетами № 3, № 4, № 6 и № 7 (две из группы более тяжелых и две из группы более легких). Тогда возможны три случая:

а) Весы в равновесии. Это значит, что выбранные монеты — настоящие, а фальшивая либо среди № 1 и № 2 и более тяжелая, либо под № 8 и более легкая. Сравнивая монеты № 1 и № 2 (*третье взвешивание*), установим, что фальшивая — легкая под № 8, если весы останутся в равновесии, или что фальшивая — тяжелая № 1 или № 2 — та, которая перетянет.

б) Перетянет группа монет № 9, № 10, № 11 и № 5. Тогда в этой группе не может быть фальшивой, так как № 9, № 10 и № 11 настоящие, а если бы фальшивой была монета № 5, взятая из группы более легких, то не могла бы перетянуть чашка с тремя настоящими монетами и одной фальшивой — легкой.

Значит, фальшивая — на второй чашке весов, среди №3, №4, №6 и №7 и именно среди тех, которые взяты из группы более легких, то есть либо №6, либо №7. Более легкая из этих двух (*третье взвешивание*) и будет фальшивой.

в) Перетянет группа монет №3, №4, №6 и №7. Тогда — либо фальшивая монета более тяжелая и, следовательно, находится на перетянувшей чашке среди монет, взятых из группы более тяжелых, то есть фальшивая монета или под №3, или под №4, либо фальшивая монета более легкая и, следовательно, находится в группе монет №9, №10, №11 и №5. В последнем случае это монета №5, так как известно, что монеты под №9, №10 и №11 — настоящие.

Таким образом, фальшивой монетой может быть одна из трех: №3, или №4 (и тогда она более тяжелая), или №5 (и тогда она более легкая). Кладем на весы монеты №3 и №4 (*третье взвешивание*), и тогда либо фальшивая (более тяжелая) та из них, которая перетянет, либо, в случае равновесия, фальшивой (более легкой) монетой будет монета №5.

247. *А* рассуждал так: «Бумажки у моих товарищей белые, значит, у меня бумажка может быть белой, а может быть и черной. Предположим она черная. Тогда *Б* имеет основания достоверно заявить о цвете своей бумажки, так как он может сказать себе: “Я вижу, что у *А* бумажка черная, а у *С* — белая, значит, у меня может быть или белая, или черная, но она не может быть черная, так как тогда *С*, зная, что черных бумажек только две, и видя у меня и у *А* черные бумажки, немедленно заявил бы о цвете своей бумажки. Но *С* не заявил об этом немедленно, следовательно, он думает, не черная ли у него бумажка, но тогда, значит, у меня на лбу он видит белую бумажку”. Но *Б* тоже молчит, следовательно, моя бумажка — не черная. Но если она — не черная, значит, *белая*».

Так рассуждал *А*, уверенный в способности своих товарищей столь же логично мыслить. Аналогично рассуждали и остальные два любителя головоломок, поэтому все они одновременно и пришли к правильному заключению о том, что у каждого из них бумажка *белая*.

248. *А* рассуждал так: «Каждый из нас может думать, что его собственное лицо чистое. *Б* уверен, что его лицо чистое, и смеется над измазанным лбом мудреца *В*. Но если бы *Б* видел, что мое лицо чистое, то он был бы удивлен смеху *В*, так как в этом случае у *В* не было бы повода дли смеха. Однако *Б* не удивлен, значит, он может думать, что *В* смеется надо мной. Следовательно, мое лицо тоже черное».

249. 1. а) Ненужное слово «двух». б) Ненужные слова «прямоугольного треугольника» и «острый».

2. а) Хорда. б) Треугольник. в) Диаметр. г) Равносторонний треугольник. д) Концентрические окружности.

3. Высота, медиана, биссектриса, ось симметрии, геометрическое место точек, равноудаленных от концов отрезка *AC*.

4. Геометрический образ → плоская фигура → многоугольник → выпуклый четырехугольник → параллелограмм → ромб → → квадрат.

5. Сумма всех внешних углов выпуклого многоугольника равна четырем прямым углам, следовательно, никакой выпуклый многоугольник не может иметь более чем три тупых внешних угла. Отсюда вытекает, что никакой выпуклый многоугольник не может иметь более трех острых внутренних углов. Три острых угла могут быть в треугольнике.

250. 1. Установлено, что искомое число четное и кратно 9, следовательно, оно кратно 18. Установлено также, что оно больше 10, но меньше 25. Отсюда сразу следует, что искомое число 18, так как между 10 и 25 число 18 — единственное число, делящееся на 18.

$$\text{Проверка: } 18 \times 4\frac{1}{2} = 81.$$

2. а) Среди искомых чисел нет числа 10, так как иначе их произведение оканчивалось бы нулем.

б) Если бы все искомые числа были больше 10, то произведение их было бы больше 10 × 10 × 10 × 10, то есть больше 10 000. Значит, среди искомых чисел должны быть числа, меньшие 10.

в) Установлено, что по крайней мере одно из искомых чисел меньше 10. Но искомые числа по условию отличаются одно от другого последовательно на 1, и так как ни одно из них не должно равняться 10, то, следовательно, все четыре искомых числа меньше 10 (однозначные).

г) Среди искомых однозначных чисел нет 5, так как в противном случае было бы и число 4 или 6, а следовательно, произведение искомых чисел оканчивалось бы нулем.

д) Рассмотрим две возможные группы однозначных чисел, удовлетворяющих условию задачи:

1, 2, 3, 4 и 6, 7, 8, 9.

Первая группа отпадает, так как $1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$; следовательно, если задача имеет решение, то искомое число могут образовать только числа 6, 7, 8 и 9. Проверка: $6 \times 7 \times 8 \times 9 = 3024$.

251. Галин отец рассуждал так: возраст ребенка должен быть не меньше 3 лет (по условию) и не больше 12 (по смыслу слова «ребенок»). Значит, через три года ребенку будет не меньше 6 и не больше 15 лет. Но между числами 6 и 15 есть только одно такое число (целое), из которого точно извлекается квадратный корень, а именно 9. Значит, возраст ребенка равен $9 - 3 = 6$ годам. Галя имела в виду следующие решения.

а) *Арифметическое*. Пусть a — возраст ребенка 3 года назад. По условию задачи квадрат этого числа больше его на 6, то есть $a^2 - a = 6$, или $a\ (a - 1) = 6$.

Если предположить, что a — число целое, то a и $a - 1$ будут делителями числа 6. Но $6 = 3 \times 2 = 6 \times 1$. Из этих двух разложений только первое даст множители, отличающиеся на 1. Следовательно, $a = 3$, и возраст ребенка равен $3 + 3 = 6$ годам.

б) *Алгебраическое*. Пусть x — возраст ребенка в настоящее время. Три года назад ему было $x - 3$ лет, а через 3 года будет $x + 3$ лет. По условию $x + 3 = (x - 3)^2$. Отсюда $x^2 - 7x + 6 = 0$. Корни этого уравнения $x_1 = 6$ и $x_2 = 1$. Но по смыслу задачи $x > 3$. Следовательно, имеем одно решение: $x = 6$.

252. Тот промежуток чисел, в котором находится задуманное число, следует разделить пополам и выяснить, в какой половине находится задуманное число. С уменьшенным вдвое промежутком опять поступить так же.

Откуда же видно, что для этого достаточно десяти вопросов?

Дело в том, что десятикратное деление пополам промежутка чисел от 1 до 1000 приведет к промежутку, состоящему только из двух чисел, из которых одно — искомое. В самом деле, возьмем промежуток, состоящий из двух чисел: 1 и 2. Удвоим его. Получим промежуток чисел от 1 до 4. Опять удвоим. Верхней границей промежутка сделается число 8 или 2^3. Еще раз удвоим. Верхняя граница отодвинется до числа 16, или 2^4.

Продолжая удваивать промежуток чисел, будем раздвигать его границы от 1 до 2^5, затем от 1 до 2^6 и т. д., пока верхняя граница промежутка не достигнет числа $2^{10} = 1024$, которое, как видите, даже немного превышает 1000.

Как ставить вопросы, поясню на примерах.

Пример 1. Пусть задумано число 1. Спрашиваем:

1) Задуманное число больше 512 (половина промежутка от 1 до 1024)?

— Нет.

2) Задуманное число больше 256 (половина промежутка от 1 до 512)?

— Нет.

3) Оно больше 128 (половина того промежутка, в котором оно может быть)?

— Нет.

4) Оно больше 64? — Нет.
5) Оно больше 32? — Нет.
6) Оно больше 16? — Нет.
7) Оно больше 8? — Нет.
8) Оно больше 4? — Нет.
9) Оно больше 2? — Нет.
10) Оно больше 1?

Задумавший число 1, конечно, и на этот вопрос должен ответить отрицательно — нет.

Тогда нам становится ясно, что задуманное число 1.

Пример 2. Пусть задумано число 860. Спрашиваем:

1) Задуманное число больше 512? — Да.

Значит, искомое число находится в промежутке от 512 до 1000. Будем для удобства считать, что оно — в промежутке от 512 до 1024. Берем в уме половину этого промежутка, то есть 256, прибавляем к 512 и спрашиваем:

2) Оно больше 768? — Да.

Отмечаем про себя, что искомое число находится в промежутке 768–1024. Прибавляем к 768 половину этого промежутка, то есть 128, и спрашиваем:

3) Оно больше 896? — Нет.

Запоминаем, что искомое число в промежутке 768–896. Прибавляем к 768 (или убавляем от 896) половину этого промежутка, то есть 64, и спрашиваем:

4) Оно больше 832? — Да.

Искомое число в промежутке 832–896. Прибавляем к 832 половину этого промежутка, то есть 32, и спрашиваем:

5) Оно больше 864? — Нет.

Искомое число в промежутке 832–864 (длиной 32 единицы).

6) Оно больше 848? — Да.

Промежуток сузился до 16 единиц: от 848 до 864.

7) Оно больше 856? — Да.

Промежуток уменьшился до 6 единиц: от 856 до 864.

8) Оно больше 860? — Нет.

Искомое число в промежутке 856–860.

9) Оно больше 858? — Да.

Значит, искомым числом может быть только либо 859, либо 860. Спрашиваем:

10) Оно больше 859? — Да.

Задуманное число — 860.

К главе X

253. Может. Предварительный расчет удобнее вести «с конца». В последнем туре первый игрок должен оставить на долю второго 1 предмет. Сколько предметов он должен оставить второму игроку в предпоследнем туре? Очевидно, 5.

В самом деле, если теперь второй игрок возьмет 1, 2 или 3 предмета, то первый игрок может взять соответственно 3, 2 или 1 предмет, и во всех случаях на долю второго игрока остается $5 - 4 = 1$ предмет.

Рассуждая аналогично, найдем, что еще раньше первый игрок должен оставить второму 9 предметов. Возьмет ли теперь второй игрок 1, 2 или 3 предмета, первый игрок может взять соответственно 3, 2 или 1 предмет, и во всех случаях на долю второго игрока остается $9 - 4 = 5$ предметов.

Всего предметов 11. Следовательно, начинающий игру должен взять 2 предмета, чтобы оставить второму 9; во втором туре он должен оставить второму игроку 5 предметов, тогда в третьем туре он сможет оставить своему партнеру 1 предмет и выиграть игру. Количества предметов, оставляемых (от конца) первым игроком второму: 1, 5, 9, — составляют ряд чисел, в котором первое число 1, а каждое последующее больше предыдущего на 4. Продолжая этот ряд чисел дальше, получим ключ к выигрышу игры в случае 30 предметов: 1, 5, 9, 13, 17, 21, 25, 29. Следовательно, при 30 предметах игрок, начинающий игру, должен взять 1 предмет, оставив своему партнеру 29, и в каждом следующем туре оставлять ему соответственно 25, 21, 17, 13, 9, 5, 1 предметов.

Обобщение игры. Рассуждая аналогично предыдущему, найдем, что выиграет игру тот, кто сможет оставить своему противнику следующие количества спичек (считая с конца):

$$1,\ p + 2,\ 2p + 3,\ 3p + 4$$

и т. д. до числа, ближайшего к n, но меньшего, чем n. Обозначим его через N.

Тогда, придерживаясь указанного правила, выиграет первый игрок, если в первый раз возьмет $n - N$ спичек. Если же $n - N = 0$, то выиграет игру не первый игрок, а второй.

254. Выиграет тот, кто к концу игры оставит своему партнеру 7 спичек. В самом деле, все 7 спичек партнер взять не может, а сколько бы он ни взял в пределах от 1 до 6 спичек, он, следовательно, не будет последним, взявшим спички со стола.

В свою очередь, для того, чтобы иметь возможность оставить партнеру 7 спичек, следует перед этим оставить ему 14 спичек, а еще раньше 21 и 28.

Тот игрок, который начинает игру, должен взять 2 спички, и тогда, придерживаясь в дальнейшем указанного правила, он окажется победителем.

255. Правильное ведение игры и на этот раз обеспечивает победу тому, кто делает первый ход. Но найти верный путь к победе в этой игре труднее, чем в предыдущих.

Начинающий игру первым ходом должен взять 2 спички, а затем в зависимости от того, сколько спичек берет противник, придерживаться следующего правила.

Если у противника *четное* число спичек, то нужно оставить ему такое количество спичек, которое на 1 больше кратного шести (19, 13, 7); если у противника *нечетное* число спичек, то нужно оставить ему такое количество спичек, которое на 1 меньше кратного шести (23, 17, 11, 5), а если это окажется невозможным, то оставить ему количество спичек, кратное шести (24, 18, 12, 6).

Вы берете, например, 2 спички, а ваш противник 4 или 2 (четное число). Остается 27 – 6 = 21 спичка или 27 – 4 = 23 спички. В соответствии с правилом вы берете 2 спички или 4, чтобы оставить противнику 19. Если же противник взял 3 спички (нечетное число), то осталось 27 – 5 = 22 спички. Так как до 17 спичек донести остаток вы не можете (нельзя взять 5 спичек), то вам следует взять 4 спички, чтобы остаток составил 18. Если противник взял 1 спичку, то и вам следует взять 1 спичку, чтобы остаток составил 27 – 4 = 23 спички, и т. д.

Правило это вытекает из следующих рассуждений (играют *A* и *B*).

1) Пусть к концу игры на столе осталось 5 спичек. Это выгодно для *A* только в том случае, когда следующий ход *B* и он имеет нечетное число спичек. (Так как взято 22 спички, то *A* при этом может иметь тоже только нечетное число спичек.) Можно рассмотреть все варианты возможного продолжения игры:

	A	B	A	B	A	B	A	B
имел	нечет	нечет	нечет	нечет	нечет	нечет	нечет	нечет
взял	–	1	–	2	–	3	–	4
	3	1	3	–	1	1	1	–
	чет	нечет	чет	нечет	чет	нечет	чет	нечет

Если же B (а значит, и A) имеет четное число спичек, то оставлять на его ход 5 спичек для A невыгодно — ведет к проигрышу (убедитесь!).

2) Пусть к концу игры на столе осталось 6 спичек. Это тоже выгодно для A только в том случае, когда следующий ход B и он имеет нечетное число спичек. (При этом A, очевидно, имеет четное число спичек.) В самом деле:

	A	B	A	B	A	B	A	B
имел	чет	нечет	чет	нечет	чет	нечет	чет	нечет
взял	–	1	–	2	–	3	–	4
	4	1	4	–	2	1	2	–
	чет	нечет	чет	нечет	чет	нечет	чет	нечет

Если же B имеет четное число спичек (значит, A — нечетное), то оставлять на его ход 6 спичек для A невыгодно — ведет к проигрышу. В самом деле, стоит только B взять одну спичку, и тогда A оказывается в таком же положении, в каком был B при оставшихся 5 спичках (см. п. 1).

3) Пусть к концу игры осталось на столе 7 спичек. Это выгодно для A только в том случае, когда следующий ход B и он имеет четное число спичек. (При этом A, очевидно, имеет тоже четное число спичек.) В самом деле:

	A	B	A	B	A	B	A	B
имел	чет	чет	чет	чет	чет	чет	чет	чет
взял	–	1	–	2	–	3	–	4
	1	–	4	1	4	–	2	1
	далее сводится к п. 1		чет	нечет	чет	нечет	чет	нечет

Если же *B* (а значит, и *A*) имеет нечетное число спичек, то оставлять на его ход 7 спичек для *A* невыгодно — ведет к проигрышу. В самом деле, стоит только *B* взять 1 спичку, и тогда *A* оказывается в таком же положении, в каком был *B* при оставшихся 6 спичках (см. п. 2).

4) Оставлять после своего хода 8, 9 или 10 спичек во всех случаях для *A* невыгодно — ведет к проигрышу. Пусть, например, после хода *A* на столе осталось 8 спичек. Возможны два случая.

а) *A* имеет нечетное число спичек, *B* — четное; *B* берет 3 спички. Теперь у него тоже нечетное число спичек. Остается на столе 5 спичек. В этом случае, как известно (см. п. 1), проигрывает тот, чей ход. Ход *A*, значит, *A* проигрывает

б) *A* имеет четное число спичек, *B* — нечетное; *B* берет 1 спичку. У него становится четное число спичек. На столе остается 7 спичек. В этом случае, как известно (см. п. 3), тоже проигрывает тот, чей ход. Ход *A*, значит *A* проигрывает. Такая же возможность повернуть игру в свою пользу появляется у *B* в тех случаях, когда *A* после своего хода оставит на столе 9 или 10 спичек. Проанализируйте эти случаи самостоятельно.

5) При дальнейшем увеличении числа спичек, оставленных на столе после хода *A*, то есть для 11, 12, 13,… спичек, условия выигрыша повторяются в том же порядке, как для 5, 6, 7,… оставленных спичек, что и подтверждает высказанное выше правило ведения игры «на выигрыш».

Пусть, например, после хода *A* осталось на столе 11 спичек. Нетрудно показать, что *A* выигрывает, если у *B* (а значит, и у самого *A*) нечетное число спичек. Действительно,

	A	*B*	*A*	*B*
имел	нечет	нечет	нечет	Нечет
взял	–	1 или 3	–	2 или 4
	3 или 1	–	4 или 2	–
	далее сводится к п. 3		далее сводится к п. 1	

Рассмотрите сами еще несколько случаев, хотя бы, например, для 12 и 13 оставленных спичек.

6) Остается еще показать, почему при 27 спичках первым ходом следует брать именно 2 спички — не больше и не меньше. Если вы возьмете 1 спичку, то противник может взять 2; останется 24 спички, и вам не удастся оставить ему 19 спичек, как того требует правило.

Если вы возьмете 3 спички, то противник может взять 1; останется 23 спички. Ход ваш, а при 23 оставшихся спичках проигрывает тот, кто имеет нечетное число спичек и делает очередной ход (см. п. 5).

Если вы возьмете 4 спички, то и противник возьмет столько же; останется 19 спичек. Ход ваш, а при 19 оставшихся спичках проигрывает тот, кто имеет четное число спичек и делает очередной ход (см. п. 5).

Если же вы возьмете 2 спички, то, сколько бы ни взял противник, вы сможете повернуть игру в свою пользу в соответствии с правилом.

256. Сочетаниями «НП» будут последовательно: (1, 2); (3, 5); (4, 7); (6, 10); (8, 13); (9, 15),…

Обозначая последовательно через a_1 первые числа и через b_1 вторые числа, составляющие сочетания «НП», расположим их в два ряда:

$$\text{(I)}\ \begin{cases} a_1, & a_2, & a_3, & a_4, & a_5, & a_6, & \ldots, \\ 1, & 3, & 4, & 6, & 8, & 9, & \ldots \end{cases}$$

$$\text{(II)}\ \begin{cases} 2, & 5, & 7, & 10, & 13, & 15, & \ldots, \\ b_1, & b_2, & b_3, & b_4, & b_5, & b_6, & \ldots \end{cases}$$

Замечаем, что b_1 больше a_1 на 1, b_2 больше a_2 на 2,…, b_n больше a_n на n, так что

$$b_n = a_n + n.$$

По какому же принципу построен первый ряд чисел?

Мы знаем, что $a_1 = 1$ и $b_1 = 2$. Образуем новую последовательность чисел (III) пока из двух чисел:

$$\text{(III)}\ \{1, 2, \ldots$$

Наименьшее из натуральных чисел, отсутствующих в последовательности (III), это 3. Оно и будет следующим числом ряда (I): $a_2 = 3$. Отсюда $b_2 = 3 + 2 = 5$.

Пополняем последовательность (III) числами 3 и 5:

(III) {1, 2, 3, 5,…

Наименьшее из натуральных чисел, отсутствующих в последовательности (III), это 4. Оно будет следующим числом ряда (I): $a_3 = 4$. Отсюда $b_3 = 4 + 3 = 7$. Тогда

(III) {1, 2, 3, 4, 5, 7,…

По тому же принципу устанавливаем, что $a_4 = 6$. Отсюда $b_4 = 6 + 4 = 10$ и т. д.

Итак, в каждом сочетании «НП»: (a_n, b_n) меньшее число (a_n) будет наименьшим натуральным числом из тех, которые еще не встречались в предыдущих сочетаниях. По формулам

$$a_n = \left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}n\right] \text{ и } b_n = \left[\frac{3+\sqrt{5}}{2}n\right]$$

можно и непосредственно получить все сочетания «НП», полагая $n = 1, 2, 3,\ldots$ Знак [] указывает, что если число, охваченное этими скобками, выразить в виде десятичной дроби, то необходимо оставить только целую часть этого числа, а все его десятые, сотые и прочие доли отбросить. Так, [1,61] = 1, [3,2] = 3 и т. д. Для полной ясности теории игры «Цзяньшицзы» приведу без доказательства еще одну теорему.

Соблюдая правила игры, никакое сочетание «НП» нельзя одним ходом превратить в другое сочетание «НП», но любое сочетание, не являющееся сочетанием «НП», можно одним ходом превратить в сочетание «НП».

Из этой теоремы следует, что любое сочетание, не входящее в группу сочетаний «НП», будет сочетанием «НВ».

Убедитесь сами в том, что пара (11, 18) будет комбинацией «НП».

259. Если вы хотите первым достигнуть 100, то первому же нужно достигнуть и 89. В самом деле, когда названную вами сумму будет отделять от 100 число 11, то какое бы число (10 или меньше) ни прибавил ваш партнер, вы тотчас найдете слагаемое, дополняющее до 100 сумму, названную партнером. Но чтобы первым достигнуть 89, нужно отдалить партнера и от этого числа на 11, то есть суметь первым сказать 78. Продолжая эти рассуждения, мы получим ряд таких чисел, называя которые вы придете к финишу первым. Начинается этот ряд чисел с единицы: 1, 12, 23, 34, 45, 56, 67, 78, 89. Ясно теперь, что если вы скажете 1, то, какое бы число (11 или меньше) ни сказал ваш партнер, он не помешает вам сказать 12, затем 23, 34 и т. д. Запомнить этот ряд «ключевых» чисел легко: в каждом десятке по одному числу, у которого число единиц на единицу больше числа десятков.

(Если партнер не знает «ключа» к игре, то он, конечно, будет прибавлять числа, случайно пришедшие ему в голову, поэтому вы, повторяя с ним игру, можете рискнуть в пределах первой половины сотни «замести следы», не придерживаясь «ключевых» чисел.)

Игру можно разнообразить изменением предельного слагаемого и предельной суммы. Пусть, например, предельное слагаемое будет по-прежнему 10, но предельная сумма не 100, а 120. Вычитая последовательно от 120 по 11, найдем следующие «ключевые» числа: 10, 21, 32, 43, 54, 65, 76, 87, 98, 109. Знающий этот «секрет» выиграет, если начнет с числа 10.

Пусть теперь предельной суммой останется 100, а предельным слагаемым будет не 10, а 8. Тогда «ключевые» числа найдем вычитанием по 9 от 100 и от каждой получающейся разности: 1, 10, 19, 28, 37, 46, 55, 64, 73, 82, 91. И в данном случае выигрывает тот, кто начинает игру и владеет ее «секретом».

Но если принять в качестве предельного слагаемого число 9, то числами, которые нужно иметь в виду, будут 90, 80, 70, 60, 50, 40, 30, 20, 10. В этом случае желающий выиграть не должен начинать игру, если, конечно, партнеру известен «секрет» победы.

260. Если игровым полем будет квадрат из 9 клеток, то начинать игру следует с обвода какой-либо стороны центрального квадрата, например со стороны *a* (рис. 354, *а*). Если теперь противник обведет сторону какого-либо из трех квадратов крайнего левого столбца, вы немедленно забираете все клетки этого столбца и делаете выигрышный ход в оставшемся прямоугольнике (см. п. 3 «теории игры» в условиях задачи). Все 9 клеток ваши. Если противник в ответ на ваш первый ход (обвод стороны *a*) обведет любую вторую сторону (например, *b*) центрального квадрата (рис. 354, *б*), вы немедленно обводите третью (*c*), и противнику, чтобы не потерять все 9 клеток, ничего не остается, как взять центральную клетку и отдать остальные 8. Если же противник после вашего первого хода (*a*) обведет сторону какого-либо из трех квадратов крайнего правого столбца, например *x* (рис. 354, *в*), вы можете взять 1 клетку вверху справа, ответить ему ходом *y*, и опять все 9 клеток ваши.

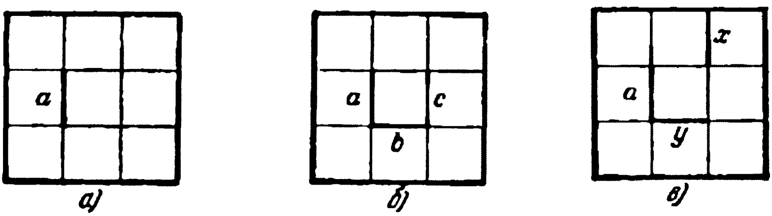


Рис. 354

264. Задача 1. Для отыскания числа № 5 по вертикали можно сделать два предположения: оно или 543, или 567 (см. условие). Испытаем первое — 543. Если это так, то первые две цифры четырехзначного числа № 6 по горизонтали, 34, а все полностью оно состоит по условию из произведения чисел 77 и $\overline{x3}$ (x — неизвестная цифра десятков). Наиболее подходящее значение для x — число 4, но $77 \times 43 = 3311$. Цифра сотен не совпадает с той, которая должна быть.

Испытаем второе возможное число № 5 по вертикали — 567. Теперь первые цифры числа № 6 по горизонтали — 36, они же должны быть первыми цифрами произведения чисел 77 и $\overline{x7}$. Наиболее подходящее значение для x — число 4. Проверяем.

77 × 47 = 3619. Это и будет число № 6 по горизонтали, а 47 удовлетворяет условию для числа № 8.

Остается найти число № 7 по вертикали и № 9 по горизонтали. Комбинируя множители чисел № 1 по горизонтали и № 3 по вертикали, легко установить, что числом № 7 по вертикали будет 99. Числом № 9 по горизонтали будет 39. Все клетки данного квадрата заполнены (рис. 355).

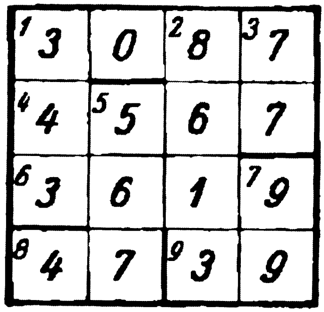
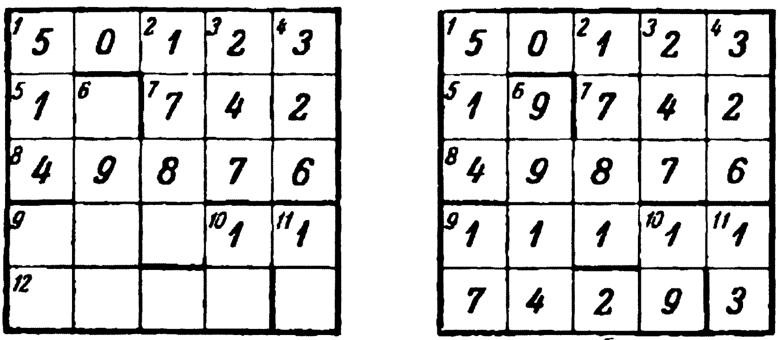


Рис. 355

Задача 2. Решение можно получить, например, следующим путем. Прежде всего следует определить числа № 1 и № 8 по горизонтали. Для составления этих двух пятизначных чисел должны быть использованы все десять цифр, а разность чисел должна быть числом трехзначным (см. № 3). Это значит, что разность первых цифр искомых чисел равна 1. Определилась первая цифра чисел № 5 и № 10 (рис. 356, *а*).



а) б)

Рис. 356

Если наибольший множитель числа № 3 (см. № 5) начинается с 1, то его наименьший двузначный множитель, очевидно, тоже начинается с 1. Определилась первая цифра числа № 11.

Еще одна единица будет по условию первой цифрой числа № 2, а второй его цифрой будет 7. Эта же цифра выражает десятки числа № 8 (см. № 7). Так как последние две цифры числа № 9 по горизонтали определились (две единицы, а все оно составляет одну девятую суммы чисел № 1 и № 8 по горизонтали, то сумма единиц этих чисел равна 9 и сумма их десятков тоже равна 9. Следовательно, первой цифрой числа № 3 будет цифра 2. Она же — последняя цифра числа № 7. Если x и y — цифры единиц чисел № 1 и № 8 по горизонтали, то выяснилось, во-первых, что $x + y = 9$, а во-вторых, $2x = y$ (см. № 4). Отсюда $x = 3, y = 6$. Число № 4 определилось полностью — 326.

Вторая цифра числа № 7 равна $11 - 7 = 4$ (см. № 3). Зная цифру сотен разности чисел № 1 и № 8 по горизонтали и цифру сотен числа № 1 по горизонтали (1), легко определить цифру сотен числа № 8 — она равна 8. Так же легко теперь определяются (по методу исключения) первые две цифры чисел № 1 и № 8 по горизонтали (рис. 356, *а*). Далее определяем число № 9 по горизонтали (11 111). У числа 247 два множителя: 19 и 13. Это дает числа № 5, № 10 и № 11.

Найдем теперь число № 6 по вертикали. Обращенное число — четырехзначное, оканчивается на 99 и состоит из произведения числа 247 на простое, двузначное. Подходит только 17. Следовательно, обращенное число № 6 равно 4199 и состоит из трех простых множителей: 13, 17 и 19. Число № 6 по вертикали — 9914. Решение показано на рис. 356, *б*.

Задача 3. Просматривая по таблице квадраты трехзначных чисел, мы найдем только одно такое число, которое одинаково читается как слева направо, так и справа налево: 698 896.

Знание этого числа дает ключ к определению чисел № 10 и № 11 по вертикали, а вслед за ними и чисел № 4 и № 9 по вертикали, № 13, № 15 и № 5 по горизонтали.

Отыскание числа № 1 по вертикали состоит в решении небольшой задачи: найти наименьшее целое число, дающее при делении на 2, 3, 4, 5 и 6 соответственные остатки 1, 2, 3, 4 и 5. Прибавим к искомому числу 1, тогда оно будет делиться на 2, 3, 4, 5 и 6. Перемножая все простые множители, входящие в эти числа в наибольших степенях, в которых они встречаются, получим $2^2 \times 3 \times 5 = 60$, а искомое число будет 59. Отсюда число № 1 по вертикали $59 - 8 = 51$.

Найдем число № 1 по горизонтали. Есть только два четырехзначных квадрата простого числа: 5041 ($= 71^2$) и 5329 ($= 73^2$). Первое число не подходит, так как нуль не может возглавлять число № 2 по вертикали. Одновременно становится известным и число № 8 по горизонтали (73). Число № 2 по вертикали определилось частями; остается проверить для контроля сумму его цифр. Единственное простое двузначное число, начинающееся с 9, это 97. Тем самым определилось число № 3 по вертикали. Остальное просто. Окончательное решение изображено на рис. 357.

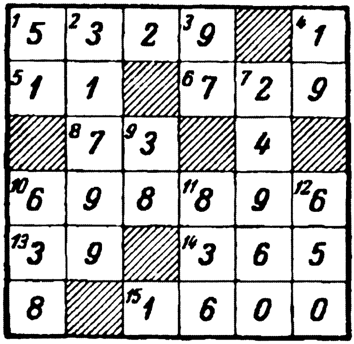


Рис. 357

265. Фокус 2. Пусть наш друг задумал число n, а вы — число p. Произведя с тем и другим числом ряд одинаковых умножений и делений, получаем результаты такого вида:

$$n\frac{a \times b \times c\ldots}{x \times y \times z\ldots}; \qquad p\frac{a \times b \times c\ldots}{x \times y \times z\ldots}.$$

Оба эти результата, разделенные первый на n, а второй на p, дадут, очевидно, одно и то же число:

$$\frac{a \times b \times c\ldots}{x \times y \times z\ldots}$$

Зная это число и сумму $\frac{a \times b \times c\ldots}{x \times y \times z\ldots} + n$, достаточно из последней вычесть первое, чтобы получить число n.

Фокус 3. *Случай 1.* Задуманное число имеет вид $4n$. Произведем требуемые действия:

$$4n + 2n = 6n,\ 6n + 3n = 9n,\ 9n : 9 = n$$

(остатка нет). Задуманное число $4n$.

Случай 2. Задуманное число имеет вид: $4n + 1$.

Его бóльшая часть $2n + 1$. Имеем:

$$(4n + 1) + (2n + 1) = 6n + 2; (6n + 2) + (3n + 1) = 9n + 3;$$
$$(9n + 3) : 9 = n \text{ (3 в остатке).}$$

Остаток меньше 5. Задуманное число $4n + 1$.

Случай 3. Задуманное число имеет вид $4n + 2$. Имеем:

$$(4n + 2) + (2n + 1) = 6n + 3.$$

Прибавляя к этому результату его бóльшую часть, то есть $3n + 2$, получаем:

$$(6n + 3) + (3n + 2) = 9n + 5, (9n + 5) : 9 = n \text{ (5 в остатке).}$$

Остаток равен 5. Задуманное число $4n + 2$.

Случай 4. Задуманное число имеет вид $4n + 3$.

Его бóльшая часть $2n + 2$. Имеем:

$$(4n + 3) + (2n + 2) = 6n + 5.$$

Его бóльшая часть $3n + 3$, поэтому

$$(6n + 5) + (3n + 3) = 9n + 8,$$
$$(9n + 8) : 9 = n \text{ (8 в остатке).}$$

Остаток больше 5. Задуманное число $4n + 3$.

Фокус 4. Очевидно, что если задумано число вида $4n$, где $n = 0, 1, 2, 3...$, то окончательный результат вычислений дает $9n$, то есть число, кратное 9. Следовательно, сумма цифр этого числа должна делиться на 9, а это значит, что скрытая цифра дополняет сумму оставшихся до числа, кратного 9. Если же сумма известных цифр сама кратна 9, то значит, скрытая цифра 9 или 0, но нулем она не может быть по условию.

Для чисел вида $4n + 1$, $4n + 2$ и $4n + 3$ результат вычислений дает соответственно $9n + 3$, $9n + 5$, $9n + 8$. Сумма цифр этих чисел становится кратной 9 только после прибавления в первом случае 6, во втором 4 и в третьем 1.

Значит, и в этих случаях скрытая цифра должна дополнять сумму оставшихся до числа, кратного 9.

Фокус 5. Обозначим задуманное число буквой x, а прибавляемое — буквой y. Выполняя требуемые действия, получим:

$$(x + y)^2 - x^2 = 2xy + y^2 = 2y(x + \frac{y}{2}) = z.$$

Отсюда видно, что задуманное число (x) равно половине результата ($\frac{z}{2}$), поделенной на прибавленное число (y) минус половина делителя ($\frac{y}{2}$).

Фокус 6. Обозначим задуманное число буквой x, частные от деления x на 3, 4 и 5 соответственно буквами a, b и c, а остатки буквами r^1, r^2 и r^3. Имеем три очевидных тождества:

$$x = 3a + r^1,$$
$$x = 4b + r^2,$$
$$x = 5c + r^3.$$

Отсюда

$$r^1 = x - 3a,\ r^2 = x - 4b,\ r^3 = x - 5c.$$

Вычислим:

$$\begin{aligned} S &= 40r^1 + 45r^2 + 36r^3 = \\ &= 40\ (x - 3a) + 45\ (x - 4b) + 36\ (x - 5c) = \\ &= 121x - 120a - 180b - 180c. \end{aligned}$$

Множители 40, 45 и 36 так и были подобраны, что все члены получившейся алгебраической суммы делятся без остатка на 60, кроме первого ($121x$), который при делении на 60 как раз и дает остаток, равный задуманному числу x. Справедливость правила доказана.

266. Фокус 1. Действия, которые в данном случае производятся над задуманным числом n, можно выразить так: $\frac{na + b}{c}$, а это выражение представить в виде $\frac{na}{c} + \frac{b}{c}$. Ясно, что, вычитая $n \times \frac{a}{c}$, получим остаток $\frac{b}{c}$.

Замечание. Всегда возможно подобрать такие числа, чтобы дробей не получалось.

Фокус 2. Обозначим буквой x число, заранее написанное вами, а буквой y — число, написанное участником фокуса. Первое действие, выполненное участником, приводит к числу $y + 99 - x$. Так как, по условию, x не больше 50, а y — в пределах от 51 до 100, то $y + 99 - x$ не меньше 100, но и не больше чем 199, то есть непременно трехзначное число, цифра сотен которого 1. Зачеркнуть в таком числе 1 — это значит уменьшить его на 100; поэтому второе действие, выполненное участником, приводит к числу $y + 99 - x - 100 + 1 = y - x$. Последнее действие, $y - (y - x) = x$, приводит к числу x, что и требовалось доказать.

Замечание. Вы можете разрешить участникам фокуса задумывать числа в другом диапазоне, например между 201 и 1000, но тогда и спрятанное число должно быть не меньше 100 и не больше 200, а в дальнейших расчетах должно использоваться число 999 вместо 99.

267.

	У первого	У второго	У третьего
Имеем первоначально	4к	7к	13к
После первой передачи	8к	14к	2к
После второй передачи	16к	4к	4к
После третьей передачи	8к	8к	8к

После третьей передачи у каждого стало предметов вдвое больше, чем было первоначально у первого. Остальное ясно.

268. Пусть задуманы числа a и b. Тогда, следуя условию, образуем $(a + b) + ab$. Прибавляя 1, мы получаем такое число, которое легко разлагается на множители:

$$(a + b) + ab + 1 = a + 1 + b(a + 1) = (a + 1)(b + 1).$$

Как видно, каждый множитель на 1 больше соответствующего задуманного числа.

Можно разработать аналогичные фокусы, базирующиеся на сложении или вычитании *разности* задуманных чисел и их произведения.

269. Пусть A — простое число, B — составное, но не делящееся на A. Два других числа x и y — взаимно простые, причем y — один из делителей числа B. После требуемых умножений может получиться сумма $Ax + By$ или $Ay + Bx$. Ясно, что первая сумма не делится на y, а вторая делится. Следовательно, по тому, делится или нет окончательный результат на y, однозначно определяем, было ли умножено на y число A или число B.

270. Сумма трех задуманных чисел и числа, кратного 3, будет:

$$a + (a + 1) + (a + 2) + 3k = 3a + 3k + 3 = 3\,(a + k + 1).$$

После умножения этой суммы на 67 получим:

$$201\,(a + k + 1).$$

По условию, $a < 60$, $3k < 100$, или $k < 34$. Следовательно, $a + k + 1$ не более чем двузначное число, а произведение любого однозначного или двузначного числа на 201, как легко понять, всегда оканчивается тем же однозначным или двузначным числом, а начинается числом, вдвое бо́льшим.

Например,

$$\begin{array}{r}
\times\begin{array}{r}41\\201\end{array}\\
\hline
+\begin{array}{r}41\\82\end{array}\\
\hline
8241
\end{array}$$

Итак, $a + k + 1$ дает число, составленное двумя последними цифрами произведения. Вычитая из этого известного числа тоже известное число $k + 1$, находим число a — меньшее из трех задуманных.

271. 1) Задуманы два числа: a и b. Производим требуемые действия:

$$(2a + 5) \times 5 = 10a + 25,\ 10a + 25 + 10 =$$
$$= 10a + 35,\ 10a + 35 + b = 10a + b + 35.$$

Вычитая 35, получаем двузначное число $10a + b$, состоящее из задуманных цифр.

2) Задуманы три числа: a, b и c. Производим требуемые, действия:

$$(10a + b + 35) \times 10 + c = 100a + 10b + c + 350.$$

Вычитая 350, получаем трехзначное число $100a + 10b + c$, состоящее из задуманных цифр.

Аналогично рассматриваются и дальнейшие случаи.

272. Если искомый возраст x, то в результате требуемых действий получится $10x - 9k$, где k — любое однозначное число. Преобразуем полученную разность:

$$10x - 9k = 10x - 10k + k = 10\,(x - k) + k.$$

Нашему собеседнику, вероятно, все же больше девяти лет ($x > 9$), а k, по условию, не больше 9 ($k \leq 9$), следовательно, $x - k$ — число положительное. В таком случае число $10\,(x - k) + k$ имеет k единиц, и если эти k единиц отбросить, то одновременно изменится разряд оставшихся цифр, то есть десятки станут единицами, сотни — десятками и т. д., словом, число уменьшится в 10 раз и будет равно $x - k$. Прибавляя к нему отброшенное число k, получаем искомый возраст x.

273. Искомый возраст x. Выполняем действия:

$$(2x + 5) \times 5 = 10x + 25.$$

Преобразуем:

$$10x + 25 = 10x + 20 + 5 = 10(x + 2) + 5.$$

Отбрасывая 5, получаем число (см. предыдущее доказательство) $x + 2$. Отнимая 2, получаем искомый возраст x.

274. Тринадцатая палочка не исчезла, она распределилась между остальными двенадцатью, удлинив их. В этом можно убедиться или измерением длин первоначально данных тринадцати палочек и последующих двенадцати, или геометрически.

Вообразим прямую (см. рис. 172), соединяющую верхние концы данных тринадцати палочек. Эта прямая и прямая MN

образуют стороны угла, пересеченные рядом параллельных прямых на равных расстояниях друг от друга. Вспомнив соответствующую геометрическую теорему, мы поймем, что прямая *MN* отсекает от второй палочки $^1/_{12}$ ее длины, от третьей $^2/_{12}$, от четвертой $^3/_{12}$ и т. д.

Сдвигая обе части картона, мы приставляем отсеченный отрезок каждой палочки (начиная со второй) к нижней части предыдущей.

А так как каждый отсеченный отрезок больше предыдущего на одну и ту же часть (на $^1/_{12}$), то каждая палочка вследствие этой операции должна удлиниться на $^1/_{12}$ своей длины, и всех палочек должно получиться 12. На глаз это удлинение не заметно, так что исчезновение тринадцатой палочки на первый взгляд представляется довольно загадочным.

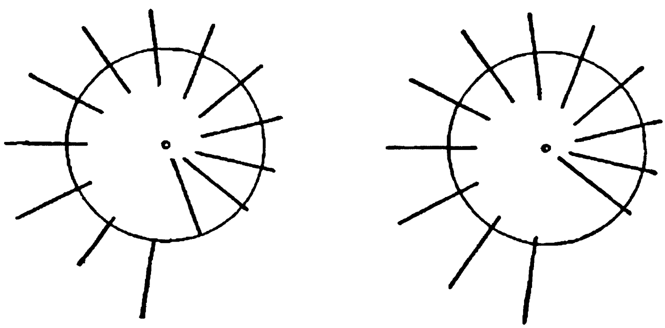


Рис. 358

Чтобы усилить эффект, можно расположить палочки по кругу, как показано на рис. 358. Если вырезать внутренний круг и укрепить его в центре так, чтобы он мог вращаться, то некоторым поворотом круга мы опять достигнем исчезновения одной палочки.

К главе XI

275. Наименьшим общим кратным нескольких чисел (НОК) будет произведение всех простых множителей одного числа и недостающих множителей остальных чисел. Для чисел первого десятка НОК составляется, очевидно, из следующих множителей: $2 \times 3 \times 2 \times 5 \times 7 \times 2 \times 3$, что и дает число 2520.

Любопытно отметить, что НОК чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 и 10 совпадает с НОК второй половины этого десятка чисел, то есть с НОК чисел 6, 7, 8, 9 и 10.

Этот пример иллюстрирует общее положение о том, что НОК любого четного числа чисел натурального ряда от 1 до $2n$ совпадает с НОК второй их половины $n + 1, n + 2, \ldots, 2n$.

276. Во всех случаях раскладывания мандаринов по пакетам не хватает только одного мандарина. Следовательно, если бы мы имели одним мандарином больше, то их число делилось бы на 10, на 9, на 8, на 7, на 6, на 5, на 4, на 3 и на 2.

Но таким числом, как вы знаете из решения предыдущей задачи, будет 2520 или кратное ему.

Значит, мы имели самое меньшее 2519 штук мандаринов.

277. Таких чисел бесчисленное множество. Наименьшее из них 58. В самом деле, разность между делителем и остатком во всех случаях равна 2. Следовательно, если к искомому числу добавить 2, то оно разделится без остатка на любой из указанных в задаче делителей.

Наименьшее кратное чисел 3, 4, 5 и 6 есть 60. Вычитая 2, получаем 58.

278. Наименьшее кратное чисел 2, 3, 4, 5 и 6 равно 60. Нужно найти кратное 7, на 1 большее кратного 60. Заметим что

$$60n + 1 = 7 \times 8n + 4n + 1.$$

Число $60n + 1$ делится на 7, если $4n + 1$ делится на 7. Наименьшее из подходящих значений n — число 5.

Значит, в корзине могло быть 301 яйцо. При следующем подходящем значении $n = 12$ получается 721 яйцо. Но этот случай (и все последующие) исключается: такую тяжесть женщина бы не унесла.

279. Очевидно, что задуманное число кратно 7, 8 и 9. Значит, оно равно $7 \times 8 \times 9 = 504$. Других множителей у него нет, так как при наличии самого меньшего из них, то есть еще одной двойки, искомое число стало бы уже четырехзначным.

280. НОК чисел 4, 8, 12 и 16 есть 48. Следовательно, теплоходы сойдутся через 48 недель, то есть 4 декабря.

281. Решение основывается на том наблюдении, что левая сторона уравнения делится на 9, значит, и правая сторона должна делиться на 9. Следовательно, должна делиться на 9 и сумма цифр $4 + 9 + 2 + a + 4$. Но $4 + 9 + 2 + 4 = 19$. Следовательно, $a = 8$. Других значений a иметь не может, так как заменяет цифру.

Извлекая теперь корень квадратный из числа 492 804, получим: $3(230 + t) = 702$. Отсюда $t = 4$.

282. Левая часть равенства делится на 11. Значит, и правая часть должна делиться на 11. В соответствии с признаком делимости на 11 имеем: $1 + 2 + 1 + 7 = a + 3$. Отсюда $a = 8$. (Другие случаи, предусмотренные признаком делимости, здесь не имеют места, так как дают для a отрицательные или двузначные значения.)

Извлекая квадратный корень из числа 37 810 201, получаем 6149. Теперь имеем несложное уравнение:

$$11\,(492 + x) = 6149.$$

Решив его, найдем, что $x = 67$.

283. Мы знаем, что числа $10^3 + 1$ и $10^6 - 1$ делятся на 1001. Нетрудно убедиться, что число $10^9 + 1$ также делится на 1001, а значит, и на 7, 11 и 13.

Теперь берем произвольное число, разбивающееся на четыре грани, например 31 218 001 416, и представляем его в следующем виде: $31\,218\,001\,416 = 416 + 1 \times 10^3 + 218 \times 10^6 + 31 \times 10^9 =$
$= 416 + 1\,(10^3 + 1 - 1) + 218 \times (10^6 - 1 + 1) + 31\,(10^9 + 1 - 1) =$
$= (416 - 1 + 218 - 31) + [\,(10^3 + 1) + 218\,(10^6 - 1) + 31\,(10^9 + 1)]$.

Число, заключенное в квадратной скобке, делится на 7, 11 и 13. Следовательно, делимость испытуемого числа на 7, 11 и 13 зависит только от делимости числа, заключенного в первой круглой скобке, которое представляет собой разность сумм граней через одну $(416 + 218) - (1 + 31) = 602$.

Число 602 (а вместе с ним и испытуемое число) делится на 7 и не делится на 11 и на 13.

284. Запишем трехзначное число в обычной алгебраической форме $100x + 10y + z$. Требуется доказать, что оно делится на 8 при условии, что двузначное число $(10x + y)$, образованное цифрами сотен (x) и десятков (y), сложенное с половиной числа единиц (z), то есть число $10x + y + \frac{z}{2}$, делится на 4.

Пусть

$$10x + y + \frac{z}{2} = 4k,$$

где k — любое целое положительное число. Выразим отсюда z и подставим в запись трехзначного числа:

$$20x + 2y + z = 8k,\ z = 8k - 20x - 2y,\ 100x + 10y + z =$$
$$= 100x + 10y + 8k - 20x - 2y = 80x + 8y + 8k.$$

Очевидно, что последнее выражение, а значит, и исходное трехзначное число делится на 8.

Ну а если $10x + y + \frac{z}{2}$ не делится на 4? Следует ли отсюда, что и данное число $100x + 10y + z$ не делится на 8?

Ответ дает обратная теорема:

Если $100x + 10y + z$ делится на 8, то $10x + y + \frac{z}{2}$ непременно делится на 4.

Действительно, пусть

$$100x + 10y + z = 8k.$$

Выразим отсюда z и подставим в $10x + y + \frac{z}{2}$. Получим:

$$10x + y + \frac{z}{2} = 10x + y + \frac{1}{2} \times$$
$$\times (8k - 100x - 10y) = -40x - 4y + 4k.$$

Делимость этого выражения на 4 очевидна.

Теперь признак делимости трехзначного числа на 8 установлен полностью. Соединяя его с общеизвестным признаком делимости многозначного числа на 8, можно считать доказанным, что данное число делится / не делится на 8, если делится / не делится на 4 число, образованное цифрами сотен и десятков данного числа, сложенное с половиной числа его единиц.

285. Пусть N — число, разбивающееся на три грани. Представим его в следующей форме:

$$N = 10^6a + 10^3b + c,$$

где a, b и c — числа, составляющие грани. Пусть $a + b + c$ делится на 37. Тогда $a + b + c = 37k$. Выразим отсюда c и подставим в N:

$$N = 10^6a + 10^3b + 37k - a - b =$$
$$= a\,(10^6 - 1) + b\,(10^3 - 1) + 37k.$$

Числа $10^6 - 1$, $10^3 - 1$ и 37 делятся на 37, следовательно, и число N делится на 37.

Обратную теорему докажите самостоятельно.

286. Примените такой же прием доказательства, как в решении предыдущей задачи. Из доказанного свойства будет следовать такое правило определения делимости данного числа на 3, 7 и 19.

Отделить от данного числа последние две цифры и к оставшемуся числу прибавить отделенное число, умноженное на 4; если нужно, повторить процесс до получения результата, делимость которого на 3, 7, 19 или на $399 = 3 \times 7 \times 19$ была бы очевидной. Если результат делится / не делится на 399 или его множители, то и данное число делится / не делится на 399 или его множители.

Выясним, например, по этому способу делимость на 3, 7 и 19 чисел 138 264 и 40 698. Имеем:

для числа 138 264:

$64 \times 4 = 256,$

$$\begin{array}{r} 1382 \\ +\ \ 256 \\ \hline 1638; \end{array} \qquad 38 \times 4 = 152 \qquad \begin{array}{r} 16 \\ +\ 152 \\ \hline 168 \end{array}$$

Продолжать процесс дальше нет смысла. Заключаем 168, а значит, и данное число 138 264 делится на 3 и на 7, но не делится на 19.

для числа 40 698:

$98 \times 4 = 392,$

$$\begin{array}{r} 406 \\ +\ 392 \\ \hline 798; \end{array} \qquad 98 \times 4 = 392 \qquad \begin{array}{r} 7 \\ +\ 392 \\ \hline 399 \end{array}$$

399 делится на 3, 7 и 19, следовательно, и данное число 40 698 делится и на 3, и на 7, и на 19, а также и на 399.

287. Известно, что $x^m - 1$ делится на $x - 1$. Следовательно, $11^{10} - 1 = (11 - 1)\ (11^9 + 11^8 + 11^7 + 11^6 + 11^5 + 11^4 + 11^3 + 11^2 + 11 + 1)$. Первый сомножитель 10. Второй сомножитель тоже делится на 10, так как состоит из 10 слагаемых, каждое из которых оканчивается на 1 (любая целая степень одиннадцати оканчивается на 1). Но если любой из двух сомножителей делится на 10, то их произведение делится на 100, следовательно, и $11^{10} - 1$ делится на 100.

К главе XII

292. Один из возможных вариантов решения представлен на рис. 359.

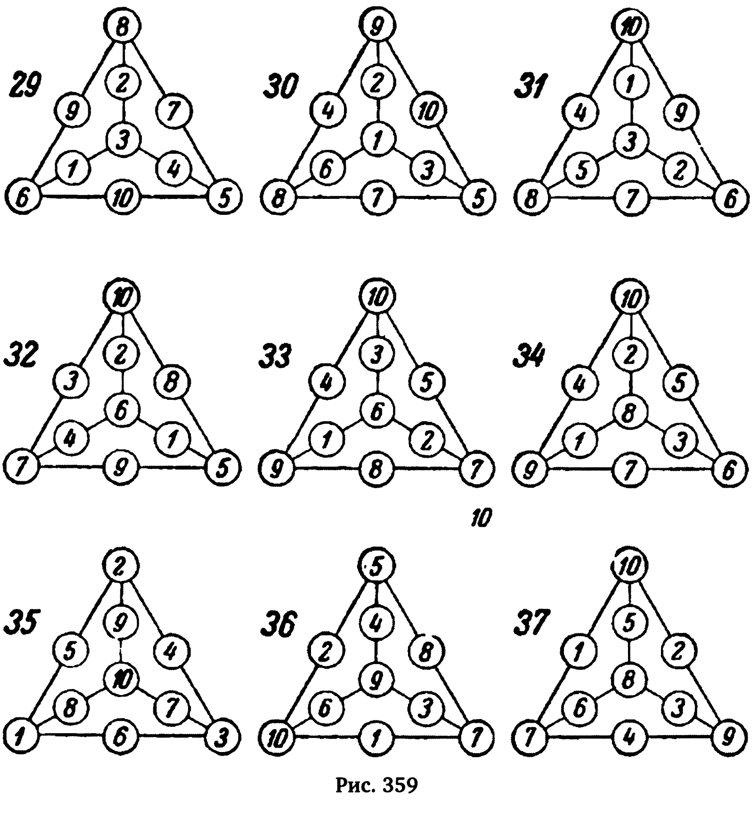


Рис. 359

293. Решение показано на рис. 360.

294. Решение показано на рис. 361.

295. Решение показано на рис. 362.

296. На рис. 363, *а* показан шестиугольник с суммой, равной 22 вдоль каждой стороны и каждого радиуса; на рис. 363, *б* соответствующие суммы равны 23.

297. Решение показано на рис. 364.

298. Решение показано на рис. 365.

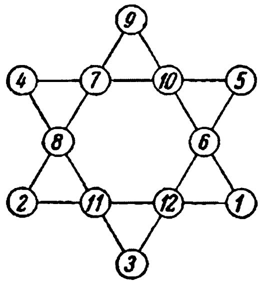


Рис. 360

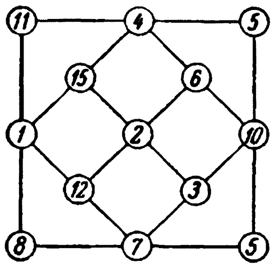


Рис. 361

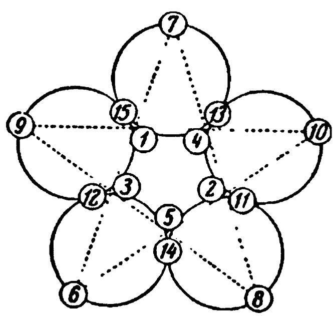
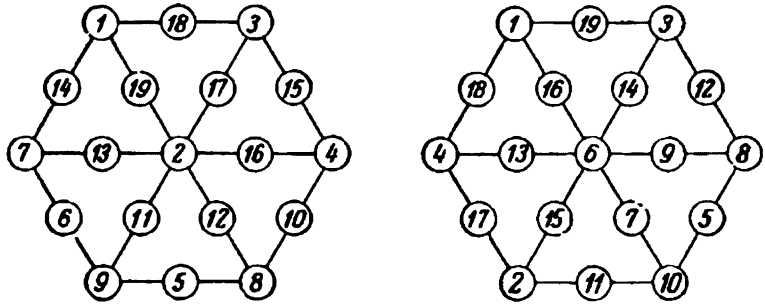
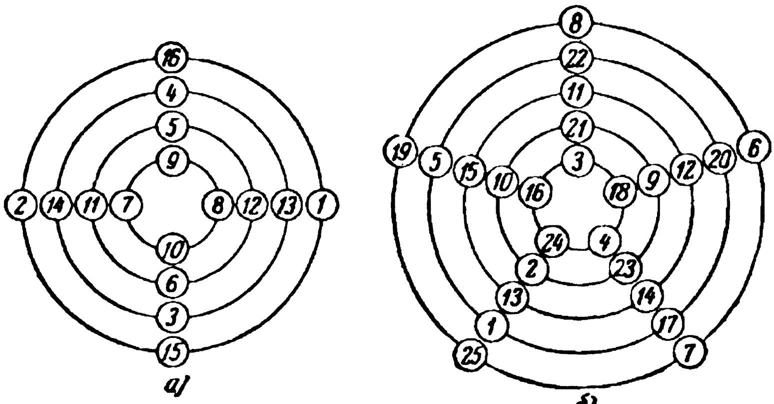


Рис. 362



а) б)

Рис. 363



а) б)

Рис. 364

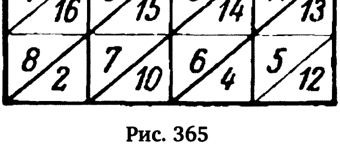


Рис. 365

299. Пронумеруем строки и столбцы данного квадрата (рис. 366, *а*). Среди его чисел, как мы знаем, есть такие, суммы квадратов и суммы кубов которых одинаковы. Это 12, 14, 3, 5 и 15, 9, 8, 2. Но в данном квадрате эти числа расположены не по диагоналям. Для того чтобы они расположились вдоль диагоналей, достаточно произвести следующие перестановки: строку II поместить на 1-е место, строку IV на 2-е место, строку I на 3-е место и строку III на 4-е место, а затем поменять местами 2-й и 3-й столбцы. Нетрудно проверить, что получившийся таким образом новый квадрат (рис. 366, *б*) обладает всеми требуемыми свойствами.

I	1	14	15	4
II	12	7	6	9
III	8	11	10	5
IV	13	2	3	16
	1	2	3	4

а)

12	6	7	9
13	3	2	16
1	15	14	4
8	10	11	15

б)

Рис. 366

300. Составляем волшебный квадрат по схеме, приведенной в тексте задачи (рис. 367, *а*). Он будет обладать некоторыми дополнительными свойствами из указанных в тексте условий, но не всеми.

I	1	29	27	7
II	23	11	13	17
III	15	19	21	9
IV	25	5	3	31
	1	2	3	

а)

5	25	3	31
11	23	13	17
29	1	27	7
19	15	21	9

б)

Рис. 367

Если теперь строку IV поставить на место строки I, строку I на место строки III, а строку III на место строки IV, после этого обменять местами второй столбец и первый, то получившийся квадрат (рис. 367, *б*) тоже окажется волшебным. Он будет обладать всеми требуемыми дополнительными свойствами. Так, например, суммы квадратов чисел в строках I и III этого квадрата одинаковы, и суммы квадратов чисел в строках II и IV тоже одинаковы:

$$5^2 + 25^2 + 3^2 + 31^2 = 29^2 + 1^2 + 27^2 + 7^2,$$
$$11^2 + 23^2 + 13^2 + 17^2 = 19^2 + 15^2 + 21^2 + 9^2.$$

Аналогично для столбцов:

$$5^2 + 11^2 + 29^2 + 19^2 = 3^2 + 13^2 + 27^2 + 21^2,$$
$$25^2 + 23^2 + 1^2 + 15^2 = 31^2 + 17^2 + 7^2 + 9^2.$$

Убедитесь сами в справедливости и остальных дополнительных свойств, указанных в тексте задачи.

301. Дополнить девятиклеточный квадрат до симметричной ступенчатой фигуры (рис. 368, *а*), расположить в нем девять целых чисел от 1 до 9 косыми рядами. Все числа, оказавшиеся вне квадрата, внести в него, руководствуясь правилом, изложенным в тексте задачи (рис. 368, *б*). Основные свойства волшебного квадрата, как нетрудно убедиться, выполняются. Константа этого квадрата — 15.

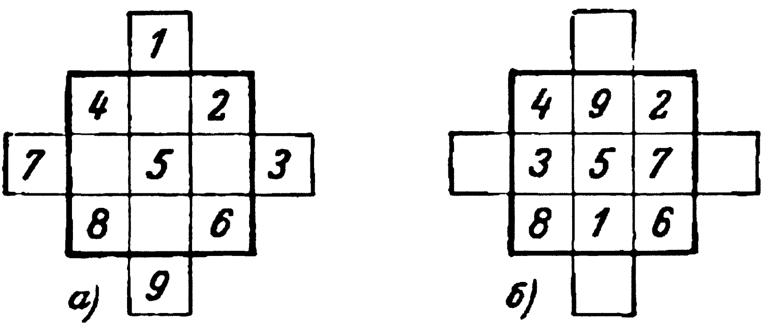


Рис. 368

Составление волшебного квадрата седьмого порядка выполните самостоятельно.

302. Данный квадрат (см. рис. 187) содержит четыре горизонтальных и четыре вертикальных ряда по четыре белые клетки в каждом, три горизонтальных и три вертикальных ряда по три белые клетки в каждом, то есть его можно составить, чередуя столбцы и строки двух волшебных квадратов: одного из 16 клеток и одного из 9 клеток. В девятиклеточном квадрате клеток меньше, чем в шестнадцатиклеточном, а их константы по условию должны быть одинаковыми, значит, для девятиклеточного квадрата следует взять 9 старших чисел из числа данных.

30	31	32	33
34	35	36	37
38	39	40	41
42	43	44	45

30	31	32	33
41	40	39	38
34	35	36	37
45	44	43	42

30	44	43	33
41	35	36	38
34	40	39	37
45	31	32	42

30	44	43	33
41	35	36	38
37	39	40	34
42	32	31	45

Рис. 369

Каждый из квадратов составим по соответствующим схемам (рис. 369 и 370). Оба получившихся квадрата имеют одну и ту же константу: 150.

		46		
	49		47	
52		50		48
	53		51	
		54		

49	54	47
48	50	52
53	46	51

Рис. 370

Остается теперь соединить их в один квадрат, размещая строки и столбцы второго квадрата между строками и столбцами первого (рис. 371). Числа, расположенные вдоль диагоналей этого квадрата, входят в состав диагоналей составляющих квадратов; поэтому их суммы одинаковы и равны требуемому числу 300.

30		44		43		33
	49		54		47	
41		35		36		38
	48		50		52	
37		39		40		34
	53		46		51	
42		32		31		45

Рис. 371

303. Искомое расположение чисел представлено на рис. 372. Нетрудно убедиться в том, что все требования условия задачи выполнены.

Волшебный квадрат на рис. 189 назван «оборотнем» за то, что он остается волшебным с той же константой, если его повернуть «вверх ногами».

1	7	2	8
4	6	3	5
7	1	8	2
6	4	5	3

Рис. 372

304. Имеем по условию

$$a_1 + a_4 + a_7 = S, \quad a_3 + a_6 + a_9 = S,$$
$$a_1 + a_5 + a_9 = S, \quad a_3 + a_5 + a_7 = S.$$

Отсюда

$$a_4 + a_7 = S - a_1, \quad a_6 + a_9 = S - a_s,$$
$$a_5 + a_9 = S - a_1, \quad a_6 + a_7 = S - a_s$$

и, следовательно, $a_4 + a_7 = a_5 + a_9$, $a_6 + a_9 = a_5 + a_7$. Складывая почленно последние два равенства, получим: $a_4 + a_7 + a_6 + a_9 = 2a_5 + a_9 + a_7$, или $a_4 + a_6 = 2a_5$. Прибавим к обеим частям этого равенства по a_5, тогда $a_4 + a_5 + a_6 = 3a_6$, но $a_4 + a_5 + a_6 = S$, следовательно,

$$3a_6 = S \text{ и } a_6 = \frac{S}{3}.$$

Аналогично можно установить справедливость соответствующего свойства для числа, занимающего центральную клетку волшебного квадрата в 25 клеток (и вообще квадрата с нечетным числом клеток).

305. 1. Составьте три полных вспомогательных волшебных квадрата. Первые два с постоянными произведениями a^3 и b^3 составьте так, как указано в тексте задачи (рис. 373, *а* и *б*). По тому же принципу составьте и третий квадрат с постоянным произведением c^3, причем начните с заполнения числами 1, c, c^2 той же диагонали, с которой начинали при составлении второго квадрата, но располагайте их не сверху — вниз — направо, а снизу — вверх — налево (рис. 373, *в*).

a	1	a^2
a^2	a	1
1	a^2	a

а)

1	b^2	b
b^2	b	1
b	1	b^2

б)

c^2	1	c
1	c	c^2
c	c^2	1

в)

ac^2	b^2	a^2bc
a^2b^2	abc	c^2
bc	a^2c^2	ab^2

$P = a^3b^3c^3$

г)

Рис. 373

Наложите теперь второй и третий квадраты на первый и перемножьте числа, попавшие в одну и ту же клетку. Получившийся квадрат (рис. 373, *г*) — искомый.

2. См. рис. 374.

1	a^2b	ac
bc	a	a^2
a^3	c	b

Рис. 374

К ГЛАВЕ XIII

310. I. По условию одно число от другого должно отличаться только расположением цифр.

Возьмем одну цифру, скажем 1. Она может занять любое из десяти мест десятизначного числа. Вот уже 10 возможных десятизначных чисел. В каждом из этих чисел остается по 9 свободных мест, и на любое из них можно поместить вторую цифру, скажем, 2. Так образуется уже $10 \times 9 = 90$ чисел, в каждом из которых еще по 8 свободных мест для третьей цифры. Заполняя свободные места по одному разу цифрой 3, образуем $10 \times 9 \times 8 = 720$ чисел, в каждом из которых остается по 7 свободных мест для четвертой цифры. Все возможные варианты расстановки четвертой цифры (4) дадут $10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5040$ чисел с шестью свободными местами в каждом.

Так, продолжая раз за разом подсчитывать все возможные случаи расположения цифр, найдем, что 10 цифр на десяти местах можно разместить $10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 3\,628\,800$ способами. Но так как среди цифр есть нуль, то не во всех этих 3 628 800 случаях образовавшееся число будет десятизначным. Когда нуль на первом месте слева, например в числе 0 123 456 789, то он не считается значащей цифрой, число становится не десяти-, а девятизначным и условию не удовлетворяет. Каждая цифра должна побывать на первом месте одинаковое количество раз. Всех цифр 10. Следовательно, в $\frac{1}{10}$ части от 3 628 800 возможных случаев первой цифрой будет нуль, а число — девятизначным. В остальных же случаях 9 (число которых можно сразу подсчитать, умножая $\frac{9}{10}$ на 3 628 800) будут получаться требуемые десятизначные числа. Итак, используя каждую из 10 цифр только по одному разу, можно составить $\frac{9 \times 3\,628\,800}{10} = 3\,265\,920$ десятизначных чисел.

III. Каждое произведение числа a на число первой группы состоит из девяти неповторяющихся цифр; каждое произведение числа b на число первой группы состоит из десяти неповторяющихся цифр. Произведения чисел a и b на числа второй группы содержат повторяющиеся цифры. Числа первой группы не имеют отличных от единицы общих делителей с числами a и b. Числа второй группы — имеют. Если a умножить на 8 и прибавить 9, то получится b: $123456789 \times 8 + 9 = 987\,654\,321$.

IV. Причина явления заключается в том, что произведение состоит из одних единиц: $12345679 \times 9 = 111\,111\,111$.

311. I. Я просто пересмотрел таблицу квадратов чисел в пределах от 32 до 99 и произвел соответствующие подсчеты. Не следует пренебрегать и такими способами решения.

312. Опыт 1. Вначале установим, что в отношении составления разностей из данных чисел не считаются различными те группы чисел, которые получаются из одной (a, b, c, d) путем круговой перестановки чисел: (d, a, b, c), (c, d, a, b), (b, c, d, a) или (c, b, a, d), (b, a, d, c) и т. д., так как для окончательного результата не существенно, какое место занимает данное число в своей группе, лишь бы его окружали те же соседи (соседом четвертого числа считаем первое).

Посмотрим теперь, сколько различных между собой начальных групп из четырех чисел можно образовать, комбинируя четные и нечетные числа без указания их величины.

Первая комбинация: все числа четные [*ч*, *ч*, *ч*, *ч*]. Вторая комбинация: три четных числа и одно нечетное [*ч*, *ч*, *ч*, *н*]. Далее [*ч*, *ч*, *н*, *н*], [*ч*, *н*, *н*, *н*], [*ч*, *н*, *ч*, *н*], [*н*, *н*, *н*, *н*]. Всего шесть комбинаций. Всякая другая комбинация будет круговой перестановкой одной из этих шести.

У каждой из этих шести групп четвертые разности будут состоять исключительно из четных чисел. Для первой комбинации чисел [*ч*, *ч*, *ч*, *ч*] высказанное утверждение очевидно. Убедимся в его справедливости для второй комбинации A_0 = [*ч*, *ч*, *ч*, *н*]. Так как разность двух четных или двух нечетных чисел всегда — число четное, а четного и нечетного чисел — число нечетное, то A_1 = [*ч*, *ч*, *н*, *н*], A_2 = [*ч*, *н*, *ч*, *н*], A_3 = [*н*, *н*, *н*, *н*], A_4 = [*ч*, *ч*, *ч*, *ч*].

Испытайте сами каждую из остальных четырех возможных комбинаций. Во всех случаях четвертый ряд разностей (A_4) будет состоять из одних четных чисел (то есть все числа ряда A_4 будут кратными числу 2).

Докажем теперь, что все числа восьмого ряда разностей (A_8) кратны 4. Для доказательства заменим временно числа четвертого ряда разностей их половинками и составим первый ряд разностей из этих половинок. Чем будет отличаться этот ряд от пятого ряда настоящих разностей?

Ответ. Его числа тоже будут половинками чисел ряда A_4.

Например, A_4 = (4, 6, 12, 22), тогда A_5 = (2, 6, 10, 18). Если же составим ряд из половинок (2, 3, 6, 11), то ряд разностей (1, 3, 5, 9) тоже составляет половинки чисел ряда A_4.

Такое соотношение между числами останется и для последующих рядов разностей, то есть второй ряд разностей половинок составит половину ряда A_6, третий ряд разностей половинок составит половину ряда A_7, четвертый ряд разностей половинок составит половину ряда A_8. Удвоив все числа четвертого ряда половинок, получим числа ряда A_8. Но четвертый ряд разностей половинок, как всякий четвертый ряд разностей, непременно состоит из четных чисел, а числа ряда A_8 еще вдвое их больше, следовательно, числа ряда A_8 делятся не только на 2, но и на 4, что и требовалось доказать. Если, например, A_4 = (4, 6, 12, 22) — числа, кратные 2, то A_5 = (2, 6, 10, 18), A_6 = (4, 4, 8, 16), A_7 = (0, 4, 8, 12), A_8 = (4, 4, 4, 12) — числа, кратные 4.

Продолжая рассуждения, устанавливаем, что еще через четыре ряда разностей получим числа двенадцатого ряда разностей, A_{12}, которые делятся на 8, то есть на 2^3; числа ряда A_{16} делятся на 2^4 и т. д. Так, например, числа разности A_{40} должны делиться на $2^{10} = 1024$. Предположим, что ни одно число начального ряда не больше 1000. Сколько бы последовательных разностей мы ни составляли, получающиеся числа и подавно не превысят 1000.

Допустим, что составлено из данных четырех чисел 39 разностей и ни одна из них не состоит полностью из нулей. Тогда A_{40} обязательно состоит только из нулей, ибо ни одно число этой разности не больше 1000, а в то же время все числа A_{40} должны делиться на $2^{10} = 1024$. Но есть только одно неотрицательное число, которое меньше 1000 и делится на 1024, — это нуль. Следовательно, все числа A_{40} — нули.

Если начальные числа больше тысячи, но меньше миллиона, то нули должны образовываться по крайней мере в восьмидесятой разности (практически всегда значительно раньше), так как числа разности A_{80} должны делиться на $2^{20} = 1\,048\,576$, а единственное неотрицательное число, меньшее 1 000 000 и делящееся на 1 048 576, — это нуль. Так можно распространить доказательство на любую четверку данных чисел.

Итак, нет такой четверки чисел, последовательные разности которых рано или поздно не обратились бы в нуль.

Опыт 2. Обосновать это свойство чисел можно так:

1) Нетрудно доказать, что сумма квадратов цифр любого числа, в котором не менее трех цифр, меньше самого числа.

Отсюда следует, что с какого бы числа мы ни начали опыт, на некотором этапе получим *двузначное* число.

2) Для двузначных чисел рассматриваемое свойство проверяется непосредственно.

Как это и бывает часто — ларчик просто открывался.

316. V. Уменьшим испытуемое число на 1 и припишем ее отдельным слагаемым. Тогда число примет вид

$$\underbrace{11\ldots1}_{n\text{ раз}}\ \underbrace{55\ldots5}_{n\text{ раз}} + 1.$$

При $n = 1$ это будет $15 + 1 = 16$; при $n = 2$ это будет $1155 + 1 = 1156$ и т.д. Заметим, далее, что число $\underbrace{11\ldots1}_{n\text{ раз}}$ можно выразить как сумму степеней числа 10 плюс 1:

$$\underbrace{11\ldots1}_{n\text{ раз}} = 10^{n-1} + 10^{n-2} + \ldots + 10 + 1.$$

Если это ясно, то обратимся снова к испытуемому числу и подвергнем его следующим преобразованиям.

$$\underbrace{11\ldots1}_{n\text{ раз}}\,\underbrace{55\ldots5}_{n\text{ раз}} + 1 = \underbrace{11\ldots1}_{n\text{ раз}}\,\underbrace{00\ldots0}_{n\text{ раз}} + \underbrace{55\ldots5}_{n\text{ раз}} + 1 =$$

$$= \underbrace{11\ldots1}_{n\text{ раз}} \times 10^n + 5 \times \underbrace{11\ldots1}_{n\text{ раз}} + 1 = \underbrace{11\ldots1}_{n\text{ раз}} \times (10^n + 5) + 1 =$$

$$= (10^{n-1} + 10^{n-2} + \ldots + 10 + 1)\,(10^n + 5) + 1.$$

Выражение в первой скобке преобразуется по формуле

$$10^{n-1} + 10^{n-2} + \ldots + 10 + 1 = \frac{10^n - 1}{10 - 1}$$

(некоторые сведения об этой формуле см. в одиннадцатой главе, задача 286), тогда

$$\underbrace{11\ldots1}_{n\text{ раз}}\,\underbrace{55\ldots5}_{n\text{ раз}} + 1 = \frac{(10^n - 1)\,(10^n + 5)}{10 - 1} + 1 =$$

$$= \frac{10^{2n} + 4 \times 10^n + 4}{9} = \left(\frac{10^n + 2}{3}\right),$$

что и требовалось доказать. Итак, как бы ни разрастался маленький «числовой кристаллик» 16 от многократного вписывания в его середину числа 15, число $\underbrace{11\ldots1}_{n\text{ раз}}\,\underbrace{55\ldots5}_{n\text{ раз}}$ всегда будет квадратом числа $\frac{10^n + 2}{3}$.

317. I.

$11 = 22 : 2 + 2 - 2,$

$12 = 2 \times 2 \times 2 + 2 + 2,$

$13 = (22 + 2 + 2) : 2,$

$14 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 - 2,$

$15 = 22 : 2 + 2 + 2,$

$16 = (2 \times 2 + 2 + 2) \times 2,$

$17 = (2 \times 2)^2 + \frac{2}{2},$

$18 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 + 2,$

$19 = 22 - 2 - \frac{2}{2},$

$20 = 22 + 2 - 2 - 2,$

$21 = 22 - 2 + \frac{2}{2},$

$22 = 22 \times 2 - 22,$

$23 = 22 + 2 - \frac{2}{2},$

$24 = 22 - 2 + 2 + 2,$

$25 = 22 + 2 + \frac{2}{2},$

$26 = 2 \times \left(\frac{22}{2} + 2\right).$

II.

$1 = (4 : 4) \times (4 : 4)$, $\quad 6 = 4 + (4 + 4) : 4$,
$2 = (4 : 4) + (4 : 4)$, $\quad 7 = 4 + 4 - 4 : 4$,
$3 = (4 + 4 + 4) : 4$, $\quad 8 = 4 + 4 + 4 - 4$,
$4 = 4 + (4 - 4) \times 4$, $\quad 9 = 4 + 4 + 4 : 4$,
$5 = (4 \times 4 + 4) : 4$, $\quad 10 = (44 - 4) : 4$.

III.

$$2=(n:n)+(n:n), \qquad 13=\frac{n}{n}+\sqrt{\frac{n}{.\dot{n}}},$$

$$4=\frac{n-.\dot{n}}{.\dot{n}+.\dot{n}}, \qquad 15=\frac{n}{.\dot{n}}+\left(\sqrt{\frac{n}{.\dot{n}}}\right)!,$$

$$7=\frac{n-.\dot{n}-.\dot{n}}{.\dot{n}}, \qquad 17=\frac{n+n-.\dot{n}}{.\dot{n}},$$

$$12=\frac{n+.n+.n}{.n}, \qquad 21=\frac{n+n+.n}{.n}$$

Как изобразить остальные числа, придумайте сами.

IV. 1.

$$3 =\frac{17\,469}{5823}, \quad 5 =\frac{13\,485}{2697}, \quad 6 =\frac{17\,658}{2943}, \quad 7 =\frac{16\,758}{2394},$$

$$8 =\frac{25\,496}{3187}, \quad 9 =\frac{57\,429}{6381}.$$

Единицу девятью цифрами можно изобразить так: $1^{23\,456\,789}$ (показатель степени может быть составлен произвольно из цифр 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9).

V. $9 =\dfrac{95\,742}{10\,638}=\dfrac{75\,249}{08\,361}=\dfrac{58\,239}{06\,471}.$

318. X. Пусть n — искомое число. По условию, n^2 оканчивается теми же тремя цифрами. Следовательно, разность $n^2 - n$ оканчивается тремя нулями.

Рассмотрим выражение $n^k - n$, где k — любое целое положительное число. Вынесем n за скобки:

$$n^k - n = n\ (n^{k-1} - 1).$$

Сразу видно, что это выражение делится на n, но оно делится и на $n - 1$, так как $n^{k-1}-1$ делится на $n - 1$ (см. условия задачи

286). Следовательно, выражение $n^k - n$ делится на произведение чисел n и $n - 1$, то есть на $n^2 - n$. Но так как $n^2 - n$ оканчивается тремя нулями, то и $n^k - n$ должно оканчиваться не меньше чем тремя нулями, то есть n^k при любом (целом и положительном) k должно оканчиваться теми же тремя цифрами, что и n. Для решения задачи достаточно, следовательно, ограничиться только теми числами, *квадрат* которых оканчивается теми же тремя цифрами.

Числа n и $n - 1$ как два соседних натуральных числа — взаимно простые, а их произведение, как установлено, должно делиться на 1000, следовательно, одно из них должно быть четным и делиться на 8, а другое должно быть нечетным и делиться на 125. Трехзначные числа, удовлетворяющие последнему условию, подобрать нетрудно. Их только четыре: 125, 375, 625 и 875. Соседние же с ними числа таковы: 124 и 126, 374 и 376, 624 и 626, 874 и 876. Но на 8 делятся из них только два: 376 и 624. Значит, они — искомые.

К главе XIV

324. Для доказательства найдем сначала общий член каждого ряда таблицы. Общий член (a_n) всякой арифметической прогрессии, как известно, равен ее первому члену (a_1), сложенному с произведением разности прогрессии (d) на число предшествующих членов: $a_n = a_1 + d\,(n - 1)$.

Будем обозначать через a_{nk} n-й член k-го ряда, а через d_k — разность k-го ряда.

Для первого ряда таблицы: $a_{11} = 4$, $d_1 = 3$, следовательно,

$$a_{n1} = 4 + 3\,(n - 1) = 1 + 3n.$$

Для второго ряда: $a_{12} = 7$, $d_2 = 5$, следовательно,

$$a_{n2} = 7 + 5\,(n - 1) = 2 + 5n.$$

Для третьего ряда: $a_{13} = 10$, $d_3 = 7$, следовательно,

$$a_{n3} = 10 + 7\,(n - 1) = 3 + 7n.$$

Для k-го ряда: $a_{1k} = 1 + 3k$, $d_k = 1 + 2k$, следовательно,

$$a_{nk} = 1 + 3k + (1 + 2k)(n - 1) = k + (2k + 1)n.$$

Формула $a_{nk} = k + (2k + 1)n$, где $k = 1, 2, 3, 4,\ldots$ и независимо от него $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$ выражает *любой* член таблицы.

Если какое-либо число N содержится в таблице, то оно равно одному из чисел a_{nk}, то есть $N = k + (2k + 1)\,n$. Тогда

$$2N + 1 = 2\,[k + (2k + 1)n] + 1 = 2k + 1 + 4kn + 2n = \\ = 2k + 1 + 2n\,(2k + 1) = (2k + 1)\,(2n + 1),$$

то есть число $2N + 1$ состоит из произведения по крайней мере двух множителей, из которых ни один не равен 1, следовательно, по определению, $2N + 1$ — число составное, что и требовалось доказать.

Обратно, пусть $2N + 1$ — любое составное нечетное число, следовательно, оно непременно может быть разложено на два нечетных множителя, из которых ни один не равен 1.

$$2N + 1 = (2k + 1)\;(2n + 1),$$

где k и n — какие-либо числа натурального ряда. Решив полученное равенство относительно N, найдем:

$$N = \frac{(2k + 1)\,(2n + 1) - 1}{2} = k + (2k + 1)\,n = a_{nk}.$$

то есть N в этом случае должно быть одним из чисел таблицы.

Мы доказали таким образом, что числа N, содержащиеся в таблице, производят по формуле $2N + 1$ только составные числа и что для всякого заранее данного составного нечетного числа вида $2N + 1$ непременно имеется и простое производящее его число N.

Но все простые числа (кроме 2) — нечетные, а любое нечетное число (кроме 1) — либо составное, либо простое. Отсюда заключаем, что *простое* нечетное число вида $2N + 1$ не имеет соответствующего производящего числа N в составе таблицы.

329. Мой юный друг слишком доверился своему глазу и не подкрепил свои действия *доказательствами*, что и привело его к кажущимся противоречиям.

Вопреки его утверждениям, он ни разу не получал *сплошного* прямоугольника из частей квадрата; обязательно должны были получаться щели, может быть, незаметные для глаза, или незаметное наложение одной части на другую.

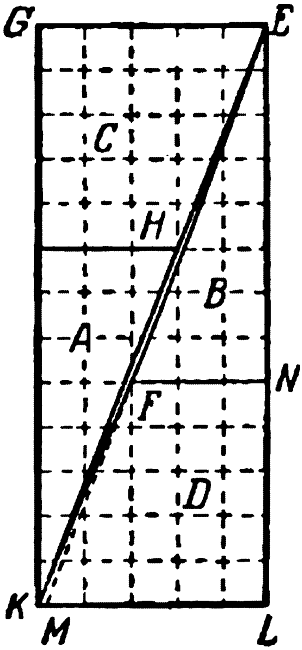


Рис. 375

Проанализируем какой-нибудь из его «благоприятных» случаев, например тот, когда сторона квадрата в 64 клетки делилась на части длиной 5 и 3 единицы (рис. 217). Складывая треугольник *A* с трапецией *C* и треугольник *B* с трапецией *D*, как показано на рис. 375, мы не можем получить слияния линий *EFK* и *EHK* в одну диагональ *EK* прямоугольника, так как линии *EFK* и *EHK* — не прямые, а ломаные с очень небольшим изломом в точках *F* и *H*.

Это легко доказать. Пусть *M* — точка, в которой пересекается сторона *KL* прямоугольника с продолжением стороны *EF* треугольника *EFN*.

Если *EFK* — прямая, а не ломаная, то точка *M* совпадет с точкой *K*. Проверим расчетом, совпадают ли эти точки.

Из подобия треугольников *EFN* и *EML* имеем:

$$ML : FN = EL : EN, \text{ или } ML : 3 = 13 : 8.$$

Отсюда $ML = \dfrac{13 \times 3}{8} = 4{,}875$, в то время как $KL = 5$.

Точка *M*, как видите, не совпадает с вершиной *K*, значит, *EFK*, а также и *EHK* — ломаные.

Площадь прямоугольной фигуры *KLEG* действительно содержит 65 клеток, но в ней есть ромбовидная щель *EFKH*, площадь которой как раз и составляет одну клетку.

Остается разобрать два вопроса:

1) Почему у нашего «экспериментатора» расхождение между площадью квадрата и площадью «прямоугольника» во всех случаях, казавшихся ему удачными, составляло ровно одну клетку?

2) При каком делении сторон квадрата он мог бы получить сплошной прямоугольник, а следовательно, и полное совпадение площадей?

Обратимся к помощи алгебры. Площадь квадрата (см. рис. 216) равна $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$. Площадь прямоугольника (см. рис. 216) равна $(2x + y)\,x = 2x^2 + xy$. Разность R между площадью прямоугольника и площадью квадрата равна $R = x^2 - xy - y^2$. Площади квадрата и прямоугольника будут равными, если

$$x^2 - xy - y^2 = 0.$$

Разделив на y^2, получим квадратное уравнение относительно $\frac{x}{y}$:

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2 - \left(\frac{x}{y}\right) - 1 = 0.$$

Принимая во внимание только положительное решение, имеем:

$$\frac{x}{y} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Только при таком (иррациональном) отношении частей x и y стороны квадрата при разрезании его на два равных треугольника и две равные трапеции возможно полноценное превращение квадрата в прямоугольник.

При рациональных значениях x и y R не может равняться нулю. При *целых* значениях x и y *наименьшая* возможная разность между площадями $R = 1$. Вот этой наименьшей *целой* разности R мой юный друг и достигал, когда брал в качестве значений x и y пару рядом стоящих чисел ряда Фибоначчи (в первом опыте $x = 5, y = 3$ (см. условие задачи), по втором $x = 8, y = 5$, в двух следующих $x = 13, y = 8$ и $x = 21, y = 13$), так как именно они удовлетворяют одному из уравнений $x^2 - xy - y^2 = 1$ или $x^2 - xy - y^2 = -1$.

Кордемский Борис Анастасьевич

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СМЕКАЛКА

Редактор *М. Горячая*
Научный редактор *А. Чижова*
Редактор обновленного издания *А. Черникова*
Руководитель проекта *А. Василенко*
Корректор *Е. Аксенова*
Верстка *М. Поташкин*
Художник *К. Аргутинский*

Иллюстрация на обложке
И. Кутобой / Студия Bang! Bang!, bangbangstudio.ru

Подписано в печать 20.10.2016. Формат 60×90/16.
Бумага офсетная № 1. Печать офсетная.
Объем 34,5 печ. л. Тираж 3000. Заказ №7988

ООО «Альпина Паблишер»
123060, Москва, а/я 28
Тел. +7 (495) 980-53-54
www.alpina.ru
e-mail: info@alpina.ru

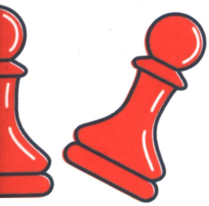
Знак информационной продукции
(Федеральный закон № 436-ФЗ от 29.12.2010 г.) 0+

Отпечатано с готовых файлов заказчика
в АО «Первая Образцовая типография»,
филиал «УЛЬЯНОВСКИЙ ДОМ ПЕЧАТИ»
432980, г. Ульяновск, ул. Гончарова, 14

ДЛЯ ЗАМЕТОК

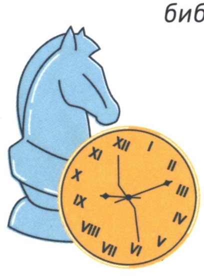
Социологические исследования десятилетиями доказывают, что востребованными на рынке труда считаются не только профессиональные навыки, но и дополнительные знания и умения, которые невозможно получить в университете: способность нестандартно подходить к решению проблемы, богатое воображение, логика и критическое мышление. Развивать такие навыки «Альпина Паблишер» предлагает способом, проверенным еще в СССР, — тренируя мозг решением математических задачек. А еще «Математическая смекалка» — это способ сравнить свой уровень знаний с уровнем знаний среднего советского школьника: именно на него было рассчитано первое издание книги, которая была опубликована впервые еще в 1954 году.

Инна Герман,
главный редактор сайта «Теории и практики»



Математика важна своей логикой, последовательностью и точностью выводов. Математика полезна тем, что она трудна. Её абстрактные строгие рассуждения требуют больших и длительных умственных усилий, требуют не столько памяти, сколько понимания и соображения. Но школа и институт остаются за плечами. Наши мысли всё в большей мере занимают однотипные рабочие задачи, «клиповые» посты в социальных сетях и вопросы быта. Среди всей этой обыденности наш мыслительный орган начинает терять тонус. Если вы хотите иметь подтянутое тело — вы занимаетесь спортом. Если вы хотите иметь живой и деятельный ум — тренируйте его. Лучше всего для этого подходит именно математика.

Артём Акшинцев,
руководитель Первой научно-популярной библиотеки, м.н.с. ИВП РАН



ISBN 978-5-9614-6009-4

9 785961 460094

ООО «Альпина Паблишер»
заказ книг +7 (495) 980-80-77
и на сайте www.alpina.ru

Борис Кордемский

Математическая смекалка

альпина
паблишер